37^a Olimpíada Brasileira de Matemática
Nível Universitário — Primeira Fase

Problema 1 Sejam m e n inteiros positivos, X um conjunto com n elementos e seja $0 \leq k \leq n$ um inteiro. São escolhidos aleatória e independentemente subconjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_m$ de X. Portanto, dado um subconjunto $Y \subset X$ qualquer, a probabilidade de termos, por exemplo, $X_1 = Y$ é igual a $1/2^n$. Calcule a probabilidade de $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m$ possuir exatamente k elementos.

Solução: *Cada conjunto X_i pode ser escolhido de 2^n maneiras distintas. Assim, o espaço amostral pode ser tomado com $(2^n)^m = 2^{mn}$ possibilidades de escolhas para os subconjuntos.*

Agora contemos as escolhas onde $\#(X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_m) = k$, como pedido. Para tanto, escolha primeiramente os k elementos da interseção: temos $\binom{n}{k}$ maneiras de fazer isso. Cada um desses k elementos vai aparecer em todos os conjuntos X_i.

[3 pontos por considerar separadamente os $\binom{n}{k}$ elementos da interseção]

Enfim, onde colocar os outros $n-k$ elementos de X? A princípio, teríamos 2^m escolhas para cada um deles (colocá-lo ou não colocá-lo em cada X_i), mas exatamente uma destas escolhas é proibida – não podemos colocar tal elemento em todos os X_i, pois então a interseção teria mais um elemento. Ou seja, cada um desses $n-k$ elementos tem $2^m - 1$ possibilidades de alocação.

[+3 pontos por observar este fato (ou por observar que, dado um elemento de X, a probabilidade de que ele não pertença simultaneamente a todos os X_j é $1 - 1/2^m$)]

Assim, temos um total de $(2^m - 1)^{n-k}$ possibilidades de alocação para os outros $n-k$ elementos. Juntando tudo, a probabilidade pedida é

$$\Pr(\#(X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_m) = k) = \frac{\binom{n}{k}(2^m-1)^{n-k}}{2^{mn}} = \frac{n!\,(2^m-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!2^{mn}}$$

[+4 pontos por concluir]

Problema 2 Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x + \sqrt{x+1}}}},$$

com dez raízes quadradas. Calcule $f'(0)$.

Solução: *Tome $f_0(x) = 1$ e defina $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$ para $n = 0, 1, 2, ...$ Com esta notação, queremos $f'_{10}(0)$.*

[1 ponto por considerar as funções f_n]

Em primeiro lugar, note que $f_0(0) = 1$. Como $f_k(0) = 1 \Rightarrow f_{k+1}(0) = \sqrt{0 + f_k(0)} = 1$, por indução, vemos que $f_n(0) = 1$ para $n = 0, 1, 2, ...$

[+2 pontos por observar que $f_n(0) = 1$, para todo n.]

Pela Regra da Cadeia, temos $f'_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x + f_n(x))^{-1/2}(1 + f'_n(x))$. Assim, $f'_{n+1}(0) = \frac{1}{2}(0+1)^{-1/2}(1 + f'_n(0)) = \frac{1}{2}(1 + f'_n(0))$.

[+4 pontos por obter essa recursão]

Agora, $f'_0(0) = 0$. Então $f'_1(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, $f'_2(0) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f'_3(0) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8}$... Isto sugere que $f'_n(0) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

De fato, $f'_0(0) = 1 - \frac{1}{2^0} = 0$. Como $f'_k(0) = 1 - \frac{1}{2^k} \Rightarrow f'_{k+1}(0) = \frac{1}{2}(1 + f'_k(0)) = \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{1}{2^k}\right) = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$, por indução, vemos que $f'_n(0) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Enfim, a resposta é

$$f'_{10}(0) = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}.$$

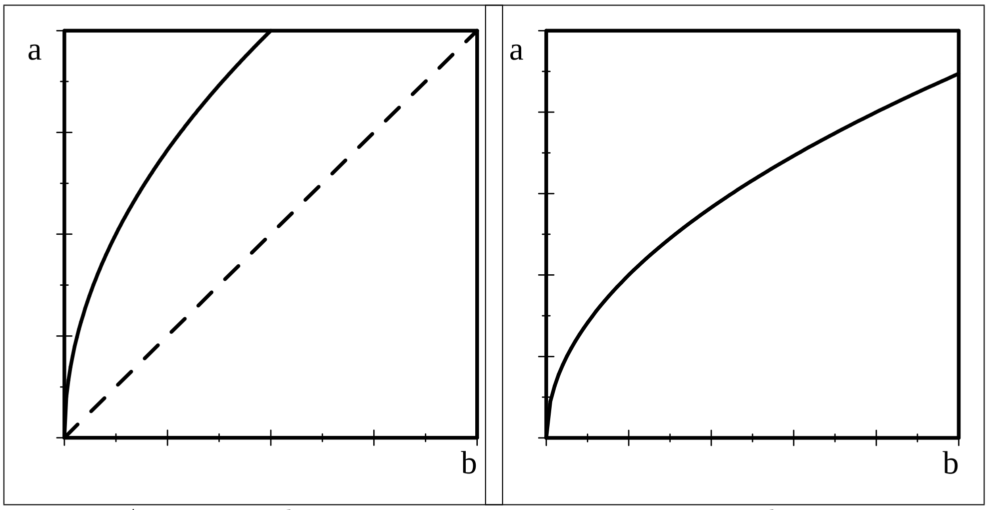
[+3 pontos por concluir]

Problema 3 Randonaldo escolhe ao acaso dois números reais b e c do intervalo $[0, \alpha]$ (ou seja, tanto b como c têm distribuição uniforme no intervalo $[0, \alpha]$), e resolve a equação $x^2 + bx + c = 0$. A probabilidade de a equação ter soluções reais é $1/2$. Qual é o valor de α?

Solução: *As raízes são reais se, e somente se,* $a^2 - 4b \geq 0$, *isto é,* $a \geq 2\sqrt{b}$. *Então queremos que a área da região* $a \geq 2\sqrt{b}$ *dentro do quadrado* $[0, \alpha] \times [0, \alpha]$ *do plano ba seja metade da área do quadrado, isto é,* $\alpha^2/2$.

[4 pontos por fazer essa reformulação geométrica do problema]

Se a parábola $a = 2\sqrt{b}$ *intersectar o lado* $a = \alpha$ *do quadrado (figura 1), a área acima da parábola é claramente menor que metade da área do quadrado. Então devemos ter algo como a figura à direita abaixo, com a parábola dividindo o quadrado em duas regiões de mesma área.*



Assim não pode ser... *... tem que ser algo assim.*

[+3 pontos por fazer essa observação]

Traduzindo em álgebra

$$\int_0^\alpha 2\sqrt{b}db = \frac{4}{3}\alpha^{3/2} = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$$

[+ 3 pontos por concluir]

Problema 4 Seja n um inteiro positivo dado. Determine todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(x+n) = f(x) \text{ e } f(x)\overline{f(x+s)f(x+t)}f(x+s+t) = 1$$

para quaisquer $x, s, t \in \mathbb{Z}$.
Obs.: Se $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ é um número complexo, $\overline{z}$ denota seu conjugado, dado por $\overline{z} = a - bi$.

Solução: *Tomando $n = p = 0$, vem*

$$f(m)\,\overline{f(m)\,f(m)}f(m) = 1 \Rightarrow |f(m)|^4 = 1 \Rightarrow |f(m)| = 1$$

para todo m inteiro.
[2 pontos por essa observação]

Assim, podemos escrever

$$f(m) = e^{i\theta_m} \text{ onde } \theta_m \in \mathbb{R}$$

onde θ_m é determinado a menos de uma constante aditiva multipla de 2π. A partir daqui, faremos todas as contas em θ modulo 2π. Com esta notação, as condições iniciais são equivalentes a

$$\begin{aligned} \theta_{m+N} &\equiv \theta_m \\ \theta_{m+n+p} &\equiv \theta_{m+n} + \theta_{m+p} - \theta_m \end{aligned}$$

[+2 pontos por obter essa recorrência]

Tomando $n = p = -m$, obtemos

$$\theta_{-m} \equiv 2\theta_0 - \theta_m$$

o que mostra como obter os termos de índice negativo a partir dos positivos.

Agora, tomando $n = p = 1$ obtemos uma recorrência

$$\theta_{m+2} \equiv 2\theta_{m+1} - \theta_m$$

Vamos mostrar, por indução, que isto implica em

$$\theta_m \equiv m\theta_1 - (m-1)\,\theta_0$$

para $m \in \mathbb{Z}$. A fórmula é trivial para $m = 0$ e $m = 1$. Supondo que ela vale para $m = k$ e $m = k+1$:

$$\begin{aligned} \theta_{k+2} &\equiv 2\theta_{k+1} - \theta_k \equiv 2\left[(k+1)\,\theta_1 - k\theta_0\right] - \left[k\theta_1 - (k-1)\,\theta_0\right] \equiv \\ &\equiv (2k+2-k)\,\theta_1 - (2k-k+1)\,\theta_0 = (k+2)\,\theta_1 - (k+1)\,\theta_0 \end{aligned}$$

o que mostra a fórmula para $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ por indução. Para índices negativos, basta ver que

$$\theta_{-m} \equiv 2\theta_0 - \theta_m \equiv 2\theta_0 - [m\theta_1 - (m-1)\,\theta_0] \equiv -m\theta_1 - (-m-1)\,\theta_0$$

confirmando a nossa fórmula.
[+3 pontos para expressar θ_m como uma função afim de m]

Enfim, a periodicidade de θ implica em

$$\theta_N \equiv \theta_0 \Rightarrow N\theta_1 - (N-1)\,\theta_0 \equiv \theta_0 \Rightarrow N\theta_1 \equiv N\theta_0 \Rightarrow \theta_1 \equiv \theta_0 + \frac{2k\pi}{N}$$

para algum k inteiro. Substituindo de volta na fórmula para θ_m, obtemos

$$\theta_m \equiv \theta_0 + \frac{2k\pi m}{N}$$

[+2 pontos por mostrar que o coeficiente linear de m na expressão para θ_m é múltiplo de $2\pi/N$]

Enfim, é facil verificar que qualquer escolha de θ_0 e k faz com que esta fórmula satisfaça ambas as condições originais. Assim, concluímos que a função f pedida deve ser da forma

$$f(m) = e^{i\theta_0}e^{i2k\pi m/N}$$

ou seja, a sequência $f(m)$ forma um polígono regular de L lados no plano complexo inscrito no círculo de raio 1 (onde L é um divisor de N; o polígono pode ser degenerado, ou estrelado).
[+1 ponto por concluir]

Problema 5 Um número natural é *bit-par* se, ao escrevermos esse número em base 2, temos um número par de dígitos (bits) iguais a 1. Isto é, se

$$n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i$$

com $b_i \in \{0,1\}$, então n é bit-par se $\sum_{i=0}^{k} b_i$ é par. Um número natural é *bit-ímpar* se ele não for bit-par. Defina

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é bit-par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é bit-ímpar.} \end{cases}$$

Considere a sequência de 0s e 1s

$$s = s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 \ldots = 011010 \ldots$$

Determine todas as sequências formadas por 5 elementos do conjunto $\{0,1\}$ (bits) que são da forma $s_n s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3} s_{n+4}$ para algum $n \geq 0$.

Solução: *Escrevamos os primeiros* 28 *termos da sequência explicitamente:* 0110/1001//1001/0110//1001/0110//0110/...

Afirmamos que:

i) Se n é par, entao $n = (A0)_2$, portanto $n+1 = (A1)_2$ e assim $s_{n+1} = 1 - s_n$, isto é, s_{n+1} é determinado por s_n. De fato, teremos a partir de s_n a sequência 01 *ou* 10.

[1 ponto por essa observação]

ii) Se n é múltiplo de 4*, então $n = (A00)_2$ e portanto $n+1 = (A01)_2$, $n+2 = (A10)_2$ e $n+3 = (A11)_2$. Portanto, temos $s_{n+3} = 1 - s_{n+2} = 1 - s_{n+1} = s_n$, isto é, s_{n+1}, s_{n+2} e s_{n+3} são completamente determinados por s_n. De fato, a partir de s_n, a sequência seria* 0110 *ou* 1001.

[+2 pontos por essa observação]

Agora, como há 5 *índices na sequência pedida, um deles tem que ser múltiplo de* 4*. Analisemos cada caso separadamente:*

- *Se $n = 4k$ a sequência fica determinada por s_n (que determina s_{n+1}, s_{n+2} e s_{n+3}) e s_{n+4}. São, ao todo,* 4 *possibilidades, a saber:* $01100, 01101, 10010, 10011$. *Todas elas aparecem, tomando respectivamente, $n = 20, 0, 8, 4$.*
- *Se $n+1 = 4k$ a sequência fica determinada por s_n e s_{n+1} (que determina s_{n+2}, s_{n+3} e s_{n+4}). São, ao todo,* 4 *possibilidades, a saber* $00110, 01001, 10110, 11001$. *Todas elas aparecem, em $n = 23, 3, 11, 7$.*
- *Se $n+2 = 4k$ a sequência fica determinada por s_n (que determina s_{n+1}) e s_{n+2} (que determina s_{n+3} e s_{n+4}). São de novo* 4 *possibilidades:* $01011, 01100, 10011, 10100$*, presentes em $n = 10, 6, 22, 2$.*
- *Se $n+3 = 4k$ a sequência fica determinada por s_{n-1} (que determina $s_n s_{n+1} s_{n+2} = 110$ ou 001) e s_{n+3} (que determina s_{n+4}). Mais* 4 *possibilidades:* $11001, 11010, 00101, 00110$*, em $n = 21, 1, 9, 5$*

[+5 pontos por provar que uma sequência de 5 termos consecutivos da sequência (s_n) tem que ser uma das sequências acima]

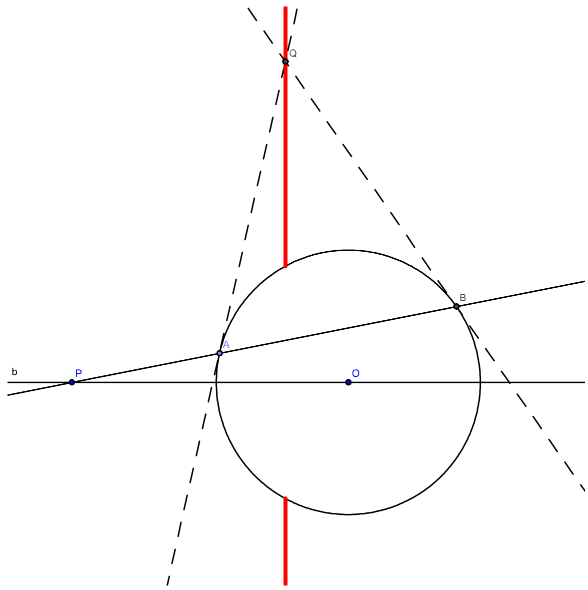
Assim as 12 *sequências acima listadas (descontando as repetições) são todas as possíveis:*
$00101, 00110, 01001, 01011, 01100, 01101, 10010, 10100, 10110, 10011, 11001, 11010$.

[+2 pontos por mostrar que essas sequências aparecem efetivamente como sequências de 5 termos consecutivos da sequência (s_n)]

Problema 6 Sejam C_1 e C_2 círculos situados em um mesmo plano. Seja, ainda, P um ponto desse plano, exterior às regiões limitadas delimitadas por C_1 e C_2. Mostre como construir os pontos Q do plano, a partir dos quais é possível traçar tangentes $\overline{QA_1}$ e $\overline{QB_1}$ a C_1, e $\overline{QA_2}$ e $\overline{QB_2}$ a C_2, tais que $\overline{A_1B_1} \cap \overline{A_2B_2} = \{P\}$.

Solução: *Vamos demonstrar o seguinte lema: dado um círculo C de centro O e um ponto P fixo, o lugar geométrico dos pontos Q (a partir dos quais é possível traçar tangentes $\overline{QA}$ e $\overline{QB}$ a C de forma que $\overleftrightarrow{AB}$ passa por P) está contido numa reta perpendicular a PO.*

[2 pontos por conjecturar este resultado]



Para tanto, coloque um sistema de coordenadas de forma que $C : x^2 + y^2 = 1$ e $P = (-p, 0)$ (com $p > 1$). Denote $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$. Então

$$\begin{aligned} A &\in C : x_A^2 + y_A^2 = 1 \\ B &\in C : x_B^2 + y_B^2 = 1 \\ P &\in \overleftrightarrow{AB} : \frac{y_B - 0}{x_B + p} = \frac{y_A - 0}{x_A + p} \Rightarrow y_B x_A - y_A x_B = p\,(y_A - y_B) \end{aligned}$$

Agora, as retas tangentes a C em A e B são

$$\begin{aligned} x x_A + y y_A &= 1 \\ x x_B + y y_B &= 1 \end{aligned}$$

cuja interseção é o ponto $Q\,(x, y)$. Multiplicando a primeira equação por y_B, a segunda por y_A e subtraindo

$$x\,(x_A y_B - x_B y_A) = y_B - y_A \Rightarrow x = \frac{y_B - y_A}{x_A y_B - x_B y_A} = -\frac{1}{p}$$

o que mostra que a coordenada x de Q depende apenas da posição de P com relação a C e não de A e B, CQD.

[+4 pontos por provar este lema]

Note também que este lugar geométrico pode ser obtido unindo os pontos $T_1, T_2 \in C$ tais que PT_1 e PT_2 são tangentes a C. De fato, é facil ver que estes são os casos limites quando tomamos $A \to T_1$ (e portanto $B \to T_1$ também) ou $A \to T_2$. Mais exatamente, como Q tem que ser exterior a C, o lugar geométrico consiste de duas semirretas a partir de T_1 e de T_2, como na figura acima.

[+2 pontos por descrever precisamente esse lugar geométrico]

Com o lema em mãos, a construção é simples: encontre as tangentes por P ao círculo C_1 e una os pontos de tangência para obter a reta r_1. Analogamente, trace as tangentes por P ao círculo C_2 e una os novos pontos de tangência para encontrar a reta r_2. O ponto Q tem que estar em ambas r_1 e r_2; então, se essas retas se encontram no exterior dos círculos, a solução é sua interseção. Se elas forem paralelas ou se encontrarem no interior de um dos círculos, o ponto Q não existe. Enfim, se elas forem coincidentes, qualquer ponto no exterior de ambas C_1 e C_2 nessa reta comum serve.

[+2 pontos por concluir]