38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

1ª Fase – Nível Universitário

GABARITO

1. Solução: Se $a = 0$, teríamos $f(b) + c \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que é um absurdo. Assim, $a \neq 0$. **[+2 pontos]**.

Fazendo $y = ax + b$ na primeira desigualdade do enunciado, obtemos $f(y) + c \leq \frac{y-b}{a}$ ou, equivalentemente, $f(y) \leq \frac{y-b}{a} - c$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Por outro lado, fazendo $y = x + c$ na segunda desigualdade do enunciado, obtemos $f(y) \geq y - (b + c)$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto, para todo $y \in \mathbb{R}$ temos

$$\frac{y-b}{a} - c \geq f(y) \geq y - (b + c). \qquad [+\mathbf{4\ pontos}]. \tag{1}$$

Isso implica que

$$\frac{y-b}{a} - c \geq y - (b + c)$$

e daí $(y - b)(\frac{1}{a} - 1) \geq 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Então, a única possibilidade é que $\frac{1}{a} - 1 = 0$, de modo que $a = 1$. Por fim segue de (1) que $f(y) = y - (b + c)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. **[+4 pontos]**.

2. Solução: Se Sonic toca a parede no ponto $(0, y)$ o tempo gasto em seu percurso é:

$$f(y) = \sqrt{1 + y^2} + \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + (1 - y)^2}.$$

Devemos minimizar esta função sobre $y \in \mathbb{R}$. Sua derivada é

$$f'(y) = \frac{\alpha\, y\,\sqrt{2 - 2y + y^2} + \sqrt{1 + y^2}\,(-1 + y)}{\alpha\,\sqrt{1 + y^2}\,\sqrt{2 - 2y + y^2}}.$$

Claramente, se $y \leq 0$ temos $f'(y) < 0$ e se $y > 1$ temos $f'(y) > 0$.

(i) Devemos mostrar que há exatamente um ponto $0 < y < 1$ tal que $f'(y) = 0$. Isso implica resolver

$$\alpha^2 y^2 (2 - 2y + y^2) = (1 + y^2)(1 - y)^2,$$

que é equivalente a

$$(\alpha^2 - 1)(2y^2 - 2y^3 + y^4) = 1 - 2y. \tag{2}$$

Note que a função $h(y) = 2y^2 - 2y^3 + y^4$ é crescente em $(0, 1)$ pois $h'(y) = 2y(2 - 3y + 2y^2) > 0$ em $(0, 1)$. Como $1 - 2y$ é decrescente em $(0, 1)$ concluímos que há apenas um valor de $y \in (0, 1)$ que verifica (1). Isso prova (i). **[+3 pontos]**.

(ii) De (1) podemos tirar o valor de α quando $y = 1/4$. Temos

$$\alpha^2 - 1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{16} - \frac{2}{64} + \frac{1}{256}} = \frac{128}{25}$$

e portanto

$$\alpha = \frac{3\sqrt{17}}{5}. \qquad [+\mathbf{3\ pontos}].$$

(iii) Ainda de (1) vemos que quando $\alpha \to \infty$ devemos ter $y(\alpha) \to 0$ e

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^2 \cdot 2y(\alpha)^2 = 1$$

Portanto $\theta = 1$ e

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha \cdot y(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad [+\mathbf{4\ pontos}].$$

3. Solução: Seja $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. O polinômio minimal de B (usando por exemplo o Teorema de Cayley-Hamilton) é $P(x) = x^2 - 4x$. Como $A^3 - 3A + 2I = B$, temos

$$(A^3 - 3A + 2I)^2 - 4(A^3 - 3A + 2I) = B^2 - 4B = 0,$$

e segue que

$$(A^3 - 3A + 2I)(A^3 - 3A - 2I) = 0.$$

O polinômio minimal de A deve portanto dividir

$$Q(x) = (x^3 - 3x + 2)(x^3 - 3x - 2) = \big[(x-1)^2(x+2)\big]\big[(x+1)^2(x-2)\big]. \qquad [+\textbf{3 pontos}]$$

Seja $R(x)$ o polinômio minimal de A. Temos então que analisar as diversas possibilidades para $R(x)$, que pelo Teorema de Cayley-Hamilton tem grau no máximo 2.

Vejamos primeiro os casos que não nos dão soluções:

Caso A. $R(x)$ tem grau 1. Nesse caso, A seria um múltiplo da identidade e portanto $A^3 - 3A + 2I$ também seria um múltiplo da identidade, o que impossibilita ser igual a B.

Caso B. $R(x) = (x-1)^2$ ou $R(x) = (x-1)(x+2)$. Nesse caso $R(x) \mid x^3 - 3x + 2$ e teríamos $A^3 - 3A + 2I = 0 \neq B$.

Caso C. $R(x) = (x+1)^2$ ou $R(x) = (x+1)(x-2)$. Nesse caso $R(x) \mid x^3 - 3x - 2$ e temos $A^3 - 3A - 2I = 0$, o que implica que $A^3 - 3A + 2I = 4I \neq B$. Logo não há soluções neste caso também. **[+3 pontos]**

Os demais casos produzem soluções válidas:

Caso 1. $R(x) = (x-1)(x+1)$. Nesse caso $A^2 = I \Rightarrow A^3 = A \Rightarrow A^3 - 3A + 2I = -2A + 2I$, e portanto

$$A = -\tfrac{1}{2}B + I = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Caso 2. $R(x) = (x-1)(x-2)$. Nesse caso $A^2 = 3A - 2I \Rightarrow A^3 = 3A^2 - 2A = 7A - 6I$, e portanto $A^3 - 3A + 2I = 4A - 4I$. Daí temos:

$$A = \tfrac{1}{4}B + I = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Caso 3. $R(x) = (x+2)(x+1)$. Nesse caso $A^2 = -3A - 2I \Rightarrow A^3 = -3A^2 - 2A = 7A + 6I$, e portanto $A^3 - 3A + 2I = 4A + 8I$. Daí temos:

$$A = \tfrac{1}{4}B - 2I = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Caso 4. $R(x) = (x+2)(x-2)$. Nesse caso $A^2 = 4I \Rightarrow A^3 = 4A$, e portanto $A^3 - 3A + 2I = A + 2I$. Daí temos:

$$A = B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: Há 4 soluções:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad [+\textbf{4 pontos}].$$

---

4. Solução: Seja $A = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)^2$ e $B = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$. Queremos maximizar $2A + B$.

(i) Do fato que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 = 1$ temos:

$$(4 - B) = \sum_{n=1}^{\infty} (4n^2 - 1)\, x_n^2. \tag{3}$$

Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}, \tag{4}$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)\,x_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}\right)\geq\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)^2=A.$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)\,x_n^2\geq 2A. \tag{5}$$

De (1) e de (3) segue que

$$4\geq 2A+B.\quad [+\mathbf{5\ pontos}]$$

A igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz ocorre quando $x_n=\frac{c}{4n^2-1}$ para uma constante $c>0$. O máximo valor de $S=2A+B$ é portanto 4. **[+1 ponto]**

(ii) Calculemos o valor da constante c. Devemos ter

$$\begin{aligned}4&=\sum_{n=1}^{\infty}4n^2x_n^2\\&=c^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{(4n^2-1)^2}\\&=\frac{c^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}\right)\\&=\frac{c^2}{4}\left(\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)+\frac{\pi^2}{8}+1\right)\\&=\frac{\pi^2c^2}{16},\end{aligned}$$

onde usamos (2) e o fato que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ (que por sua vez pode ser deduzido a partir do fato que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.)

Segue portanto que $c^2=\frac{64}{\pi^2}$ e a única sequência que verifica a igualdade é

$$x_n=\frac{8}{\pi}\frac{1}{(4n^2-1)}.\quad [+\mathbf{4\ pontos}].$$

---

5. Solução: Observe que A tem posto 2. **[+1 ponto]**

Seja R uma rotação de $\mathbb{R}^3$ tal que a imagem por R do eixo z é o núcleo de A. Trocando A por $\tilde{A}:=A\circ R$ o limite em questão não muda (pois temos $\mathrm{vol}(\{v\in\mathbb{R}^3;\ |v|\leq 1 \text{ e } |Av|<\varepsilon\})=\mathrm{vol}(\{v\in\mathbb{R}^3;\ |v|\leq 1 \text{ e } |\tilde{A}v|<\varepsilon\})$). Além disso, $\tilde{A}(x,y,z)=B(x,y)$ para uma certa transformação linear $B:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. **[+1 ponto]**

Temos $|\tilde{A}(x,y,z)|<\varepsilon\iff|B(x,y)|<\varepsilon$, e o volume do conjunto $\{v\in\mathbb{R}^3;\ |v|\leq 1 \text{ e } |\tilde{A}v|<\varepsilon\}$ é assintoticamente $2.(|\det B|)^{-1}\cdot\pi\varepsilon^2$. **[+3 pontos]**

Para calcular $|\det B|$ note que $(\det B)^2=\det(B\circ B^t)$ e $B\circ B^t=\tilde{A}\circ\tilde{A}^t=(A\circ R)\circ(A\circ R)^t=A\circ R\circ R^t\circ A^t=A\circ A^t$. Como $A\circ A^t(x,y)=(3x+2y,2x+2y)$, cujo determinante é 2, temos $|\det B|=\sqrt{2}$. Portanto, $s=2$ e $c=\pi\sqrt{2}$. **[+5 pontos]**

---

6. Solução: Seja $\alpha\in\mathbb{R}$ e, para $1\leq k\leq 2016$, seja A_k o ponto do plano cartesiano cujas coordenadas são as partes real e imaginária de $(\alpha+i\alpha^2)\omega^{k-1}$, onde $\omega=\cos\frac{2\pi}{2016}+i\sin\frac{2\pi}{2016}$. É bem sabido que $A_1A_2\ldots A_{2016}$ é um polígono regular de 2016 lados, e basta mostrarmos que é possível escolher α de tal modo que $A_k\notin S$, para todo k.

Seja Γ um das circunferências de S, com centro $O=(a,b)$ e raio r, de sorte que $a,b,r\in\mathbb{Q}$. Fazendo $\cos\frac{2(k-1)\pi}{2016}=c$ e $\sin\frac{2(k-1)\pi}{2016}=s$, temos

$$(\alpha+\alpha^2i)(c+si)=(c\alpha-s\alpha^2)+(s\alpha+c\alpha^2)i.$$

Então, $A_k\in\Gamma\Leftrightarrow\overline{A_kO}=r$ ou, o que é o mesmo, se, e só se,

$$\big((c\alpha-s\alpha^2)-a\big)^2+\big((s\alpha+c\alpha^2)-b\big)^2-r^2=0.$$

Essa última igualdade, por sua vez, equivale a

$$\alpha^4 + (1 - 2bc + 2as)\alpha^2 + (2ac - 2bs)\alpha + (a^2 + b^2 - r) = 0,$$

de modo que α deveria ser algébrico sobre $\mathbb{Q}(c, s)$. Mas, como c e s são algébricos sobre $\mathbb{Q}$, concluímos que α deveria ser algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Logo, escolhendo $\alpha \in \mathbb{R}$ transcendente ($\alpha = \pi$, por exemplo), concluímos que $A_k \notin S$, para todo k. **[+10 pontos]**.

Solução alternativa. Sendo uma união enumerável de conjuntos de medida nula, o conjunto S tem medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^2$. Seja χ_S a função característica de S (i.e. $\chi_S(x) = 1$ se $x \in S$ e $\chi_S(x) = 0$ se $x \notin S$). Daí

$$0 = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_S(x)\,\mathrm{d}x \quad [+\mathbf{2\ pontos}].$$

Suponha que a conclusão do enunciado não seja verdadeira. Chegaremos a uma contradição. Seja $\alpha = \frac{2\pi}{2016}$. Usando coordenadas polares e o teorema de Fubini (já que todas as funções envolvidas são não-negativas)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \chi_S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} \chi_S(r\theta)\,\mathrm{d}\theta \right) r\,\mathrm{dr} \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{2015} \int_{[j\alpha,(j+1)\alpha)} \chi_S(r\theta)\,\mathrm{d}\theta \right) r\,\mathrm{dr} \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{2015} \int_{[0,\alpha)} \chi_S(r(\theta + j\alpha))\,\mathrm{d}\theta \right) r\,\mathrm{dr} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{[0,\alpha)} \left(\sum_{j=0}^{2015} \chi_S(r(\theta + j\alpha)) \right) \mathrm{d}\theta \right) r\,\mathrm{dr} \\
&\geq \int_0^\infty \left(\int_{[0,\alpha)} 1\,\mathrm{d}\theta \right) r\,\mathrm{dr} \\
&= \int_0^\infty \alpha\, r\,\mathrm{dr} \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

uma contradição. Acima utilizamos o fato de que $\sum_{j=0}^{2015} \chi_S(r(\theta + j\alpha)) \geq 1$ pois os pontos $r(\theta + j\alpha)$, $j = 0, 1, \ldots, 2015$ são vértices de um polígono regular de 2016 lados, e estamos assumindo que pelo menos um deles está em S. **[+8 pontos]**.