38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase – Nível 1 (6º ou 7º ano)

GABARITO PARTE A - Cada problema vale 5 pontos

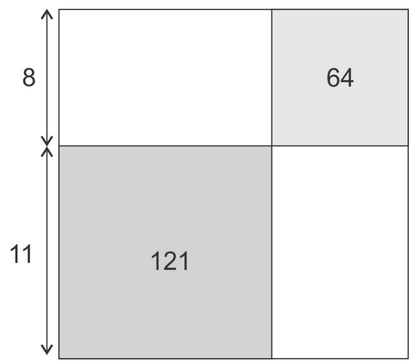
CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A
Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. NENHUM PONTO deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	1016	1000	361	7532	11	0035

1. **[Resposta:** 1016**]**
Solução: O menor número de dez algarismos é $1000^3 = 1000000000$. Portanto, o menor número cujo cubo é um número de dez algarismos é o número 1000 e a quantidade de números inteiros de 1000 a 2015 é $2015 - 1000 + 1$.

2. **[Resposta:** 1000**]**
Solução: Se o valor de um carro era inicialmente x e foi vendido com lucro de 20% sobre x, então ele foi vendido por $x + 20\%$ de x, ou seja, por $x + 0,2x = 1,2x$. Logo $1,2x = 12000 \iff x = \frac{12000}{1,2} = 10000$, ou seja, obteve um lucro de $12000 - 10000 = 2000$ reais.
Se o valor do carro era inicialmente y e foi vendido com um prejuízo de 20% sobre y, então ele foi vendido por $y - 20\%$ de y, ou seja, por $y - 0,2y = 0,8y$. Logo $0,8y = 12000 \iff y = \frac{12000}{0,8} = 15000$, ou seja, obteve um prejuízo de $15000 - 12000 = 3000$ reais.
Portanto, no total, o comerciante teve um prejuízo de $3000 - 2000 = 1000$ reais.

3. **[Resposta:** 361**]**
Solução: O quadrado de $64m^2$ de área tem seu lado medindo $8m$, pois $8^2 = 64$, e o de área $12m^2$ tem seu lado medindo $11m$, pois $11^2 = 121$. Logo, o quadrado maior tem lado de medida $8 + 11 = 19m$ e sua área é $19^2 = 361m^2$.



4. **[Resposta:** 7532**]**
Solução: Quando multiplicamos B por C, o resultado termina em B. Como os números são 2, 3, 5 e 7, concluímos que $B = 5$. O número C pode ser 3 ou 7. Por outro lado, vemos que $B + D = A$, ou seja, $5 + D = A$, isto é, $A = 7$. Assim, $D = 2$ e $C = 3$. Portanto o número $ABCD$ é o número 7532. Veja como fica a conta.

5. **[Resposta:** 11**]**
Solução: Um quadrilátero convexo pode ser dividido em dois triângulos. Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360^o. Na figura, o prolongamento de cada um dos lados dos triângulos internos e dois desses lados formam um quadrilátero cujos ângulos internos medem $90°$, $90°$, $122°$ e $X + 47°$. Para se convencer disso, considere a linha verde vertical traçada a partir do vértice superior do quadrilátero, paralela ao lado do quadrado maior. Veja a Figura 1.
Logo, $90° + 90° + 122° + X + 47° = 360° \iff X = 360° - 349° = 11°$.

Solução alternativa:

Traçando duas pelos vértices dos quadrados menores, paralelas ao lado do quadrado maior, e, prolongado-se o lado do quadrado para obter um triângulo retângulo, temos $X + 79° + 90° = 180° \iff X = 11°$. Veja a Figura 2.

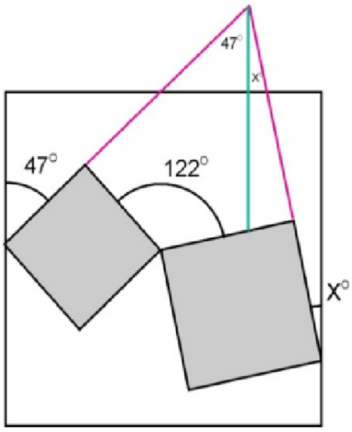


Figura 1

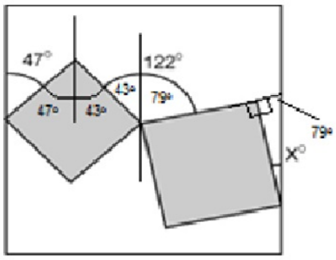
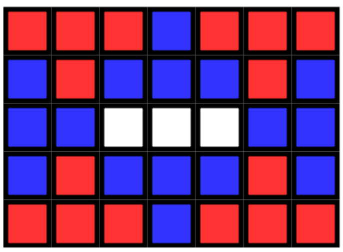
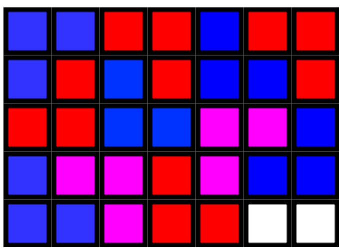


Figura 2

6. **[Resposta: 0035]**
Solução: Sendo k a quantidade de peças do tipo 1, a quantidade de casas no tabuleiro é $mn = 4k+3 = 4(k+1)-1$. Além disso, sendo ℓ a quantidade de peças do tipo 2, a quantidade de casas no tabuleiro é $mn = 3\ell+2 = 3(\ell+1)-1$. Logo $mn+1 = 4(k+1) = 3(\ell+1)$ é múltiplo de 4 e 3, e é portanto múltiplo de 12. Com isso, mn pode ser igual a $11, 23, 35, \ldots$. Como 11 e 23 são primos, nesse caso o tabuleiro teria uma linha ou uma coluna, e não é possível preencher com peças do tipo 1 nem do tipo 2.
Para $m = 5$ e $n = 7$, temos as seguintes possibilidades de preencher o tabuleiro:



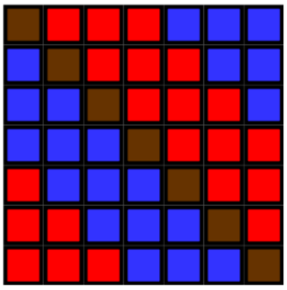


38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase – Nível 1 (6º ou 7º ano)

GABARITO PARTE B - Cada problema vale 10 pontos

PROBLEMA 1. Como há três cores para $7 = 3 \cdot 2 + 1$ casas em cada fila, cada linha tem pelo menos 3 casas vermelhas e cada coluna tem pelo menos 3 casas azuis. Logo o tabuleiro tem pelo menos $3 \cdot 7 = 21$ casas vermelhas e $3 \cdot 7 = 21$ casas azuis.
Suponha que há pelo menos 22 casas vermelhas. Assim, pelo princípio da casa dos pombos, alguma coluna tem pelo menos 4 casas vermelhas, o que não é possível pois deveria haver pelo menos mais 4 casas azuis. Da mesma maneira mostramos que não é possível haver 22 ou mais casas azuis.
Logo há 21 casas vermelhas, 21 casas azuis e $49 - 21 - 21 = 7$ casas marrons. O seguinte exemplo mostra a existência de um tabuleiro com essas condições.



Critério de Correção

a)
Concluir que cada linha possui pelo menos 3 casas vermelhas(ou que cada coluna possui pelo menos 3 casas azuis). **[2 pontos]**
Mostrar que o tabuleiro deve possuir pelo menos 21 casas vermelhas. **[2 pontos]**

b)
Mostrar que não podem existir mais de 21 casas vermelhas ou mostrar que devem existir pelo menos 7 casas marrons. **[2 pontos]**
Exibir um exemplo de pintura do tabuleiro satisfazendo as condições do enunciado. **[4 pontos]**

PROBLEMA 2.

a) O quadriculado 5×5 tem perímetro igual a $4 \cdot 5 = 20$. No seu interior há $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ segmentos unitários. Portanto, o quociente associado a esse quadriculado é $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$.

b) O quadriculado $n \times n$ tem $4n$ segmentos unitários no seu perímetro e $2n \cdot (n-1)$ no seu interior. Logo, o número associado a esse quadrilátero é $\frac{4n}{2n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$. Temos $\frac{2}{n-1} = \frac{1}{4} \iff n - 1 = 8 \iff n = 9$. O número de segmentos unitários desse quadriculado é igual ao número de segmentos unitários do seu perímetro mais o número de segmentos unitários do seu interior, totalizando $4 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot (9-1) = 36 + 144 = 180$ segmentos unitários.

c) Se um quadriculado da sequência é $n \times n$, o seu sucessor é $(n+1) \times (n+1)$ e os números associados a eles são, respectivamente, $\frac{2}{n-1}$ e $\frac{2}{n+1-1} = \frac{2}{n}$. Como os números associados decrescem em valor, temos $\frac{2}{n} - \frac{2}{n-1} = \frac{1}{190} \iff \frac{2n+2-2n}{n(n-1)} = \frac{1}{190} \iff \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{190} \iff \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{380}$. Note que $380 = 19 \cdot 20$, logo o quadriculado menor tem $n = 20$ segmentos unitários.
Obs.: resolvendo a equação de segundo grau, obtemos dois valores para n, mas um deles é negativo.

Critério de Correção

a)

Descobrir que o quadriculado 5×5 tem perímetro igual a $4 \cdot 5 = 20$ e no seu interior há $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ segmentos unitários. **[2 pontos]**

Concluir que o quociente associado a esse quadriculado é $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$. **[1 ponto]**

b)

Descobrir que o quadriculado $n \times n$ tem $4n$ segmentos unitários no seu perímetro e $2n \cdot (n-1)$ no seu interior e que, portanto, o número associado a esse quadrilátero é $\frac{4n}{2n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$. **[1 ponto]**

Resolver a equação $\frac{2}{n-1} = \frac{1}{4}$ e encontrar $n = 9$. **[1 ponto]**

Concluir que o quadriculado procurado tem, portanto, $4 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot (9-1) = 36 + 144 = 180$ segmentos unitários. **[1 ponto]**

c)

Obter, para um quadriculado da sequência $n \times n$ e o seu sucessor $(n+1) \times (n+1)$, os números associados a eles, $\frac{2}{n-1}$ e $\frac{2}{n+1-1} = \frac{2}{n}$, respectivamente. **[1 ponto]**

Concluir que, dessa forma, temos $\frac{2}{n} - \frac{2}{n-1} = \frac{1}{190} \iff \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{380}$. **[1 ponto]**

Resolver a equação ou notar que $380 = 19 \cdot 20$ e concluir que o quadriculado menor tem $n = 20$ segmentos unitários. **[2 pontos]**

PROBLEMA 3. Nas condições do problema, há quatro algarismos pares: 2, 4, 6 e 8 e cinco algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7 e 9.

a) Para escrever os quatro algarismos pares nas quatro casas cinzentas, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades e para escrever os cinco algarismos ímpares nas cinco casas brancas, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilidades. Para cada escrita feita nas casas cinzentas, temos 120 possibilidades de escrita nas casas brancas. Logo, o número total de possibilidades é $120 \cdot 24 = 2880$.

b) Para escrever quatro dos cinco algarismos ímpares nas casas cinzentas, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ possibilidades e para escrever os cinco algarismos que restarem nas cinco casas brancas, temos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilidades. Logo, o número total de possibilidades é $120 \cdot 120 = 14400$.

c) A soma dos algarismos de 1 a 9 é 45. Dividindo 45 em duas parcelas tais que uma é o dobro da outras, obtemos 15 e 30. Portanto, a soma dos algarismos escritos nas casas cinzentas é 30 e isto pode ser feito usando apenas os algarismos maiores: $9 + 8 + 7 + 6 = 30$. Como existem somente quatro dentre os nove algarismos que podem ser escritos nas casas cinzentas, a resposta para este item é exatamente igual à resposta para o item a), 2880 possibilidades.

Critério de Correção

a)

Descobrir que, para escrever os quatro algarismos pares nas quatro casas cinzentas, há $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades. **[1 ponto]**

Descobrir que, para escrever os cinco algarismos ímpares nas cinco casas brancas, há $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilidades. **[1 ponto]**

Concluir que o número total de possibilidades é $120 \cdot 24 = 2880$. **[1 ponto]**

b)

Descobrir que, para escrever quatro dos cinco algarismos ímpares nas casas cinzentas, há $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ possibilidades. **[1 ponto]**

Descobrir que, para escrever os cinco algarismos que restarem nas cinco casas brancas, há $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilidades. **[1 ponto]**

Concluir que o número total de possibilidades é $120 \cdot 120 = 14400$. **[1 ponto]**

c)

Descobrir que a soma dos algarismos de 1 a 9 é 45 e dividir 45 em duas parcelas tais que uma é o dobro da outras, obtendo 15 e 30. **[1 ponto]**

Descobrir que, para a soma dos algarismos escritos nas casas cinzentas ser 30, isto pode ser feito usando apenas os algarismos maiores: $9 + 8 + 7 + 6 = 30$. **[1 ponto]**

Concluir que o número total de possibilidades é 2880. **[2 pontos]**