

37ª Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. **NENHUM PONTO** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

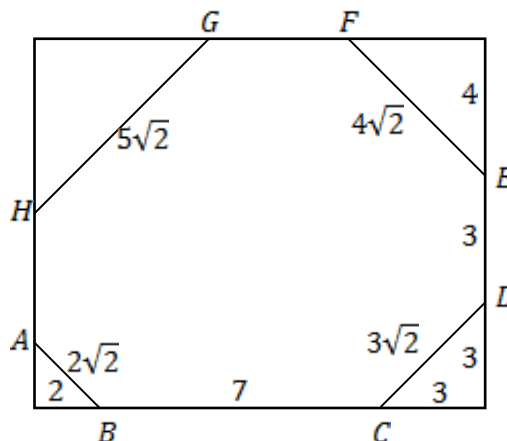
Problema	01	02	03	04	05	06
Resposta	0035	0093	0931	0520	0054	0800

01. [Resposta: 0035]

Solução: Como $MMC(2,3,4,5,6) = 60$, segue que $60-1=59$ deixa resto 1 na divisão por 2, resto 2 na divisão por 3, resto 3 na divisão por 4, resto 4 na divisão por 5 e resto 5 na divisão por 6. Portanto, o menor inteiro positivo x que deixa restos diferentes quando dividido por 2,3,4,5 e 6 é menor ou igual a 59. Claramente x não pode deixar resto 0 por 6, pois neste caso também deixaria tal resto por 2 e 3. Como os restos de x na divisão por 2,3,4 e 5 são menores ou iguais a 4, caso o resto na divisão por 6 também seja menor ou igual a 4, teremos os 5 restos escolhidos dentre os elementos de $\{0,1,2,3,4\}$. Para que todos sejam distintos, levando-se em conta que o resto na divisão por 6 determina os restos nas divisões por 2 e 3, a única distribuição de restos possível é x deixar resto 0 por 2, 1 por 3, 2 por 4, 3 por 5 e 4 por 6. Assim $x + 2$ seria múltiplo de 60 o menor valor inteiro positivo de x para que isso ocorra é $MMC(2,3,4,5,6) - 2 = 58$. Resta apenas analisarmos se existem soluções menores quando x deixa resto 5 por 6. Podemos listar todos os números menores que 60 com tal propriedade: 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53 e 59. Dentre eles, o menor que deixa todos os restos distintos na divisão por 2,3,4,5 e 6 é o número 35. Veja que ele é menor que as outras soluções encontradas. Portanto $x = 35$.

02. [Resposta: 0093]

Solução: Os ângulos internos de um octógono equiângulo são iguais a $\frac{(8-2)180^\circ}{8} = 135^\circ$. Assim, prolongando AH , BC , DE e FG , obtemos um retângulo subtraído de quatro triângulos retângulos isósceles.



Os lados do retângulo são $\frac{AB}{\sqrt{2}} + BC + \frac{CD}{\sqrt{2}} = 2 + 7 + 3 = 12$ e $\frac{CD}{\sqrt{2}} + DE + \frac{EF}{\sqrt{2}} = 3 + 3 + 4 = 10$.

Com isso, a área do octógono $ABCDEFGH$ é

$$10 \cdot 12 - \frac{2^2}{2} - \frac{3^2}{2} - \frac{4^2}{2} - \frac{5^2}{2} = 93.$$

03. [Resposta: 0931]

Solução: Seja r a solução correta de $ax = b$. A solução de $bx = a$ é $x = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{r}$, logo

$$\frac{1}{r} = r - 60 \Leftrightarrow r^2 - 60r - 1 = 0 \Leftrightarrow r = 30 \pm \sqrt{901}.$$

Como r é da forma $m + \sqrt{n}$, m, n inteiros, $m = 30$ e $n = 901$.

04. [Resposta: 0520]

Solução: Precisamos armazenar $2015 \cdot 3 + 2015 \cdot 5 = 2015 \cdot 8$ litros de líquido, então precisamos de pelo menos $\frac{2015 \cdot 8}{31} = 520$ contêneires. Pode-se verificar que é possível fazer isso, com **325** contêneires contendo **2** garrafas de água e **5** garrafas de suco e **195** contêneires contendo **7** garrafas de água e **2** garrafas de suco.

05. [Resposta: 0054]

Solução: Temos

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{y} = 2015 \Leftrightarrow \frac{xy + z^2}{yz} = 2015$$

$$\text{e } \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 37 \Leftrightarrow \frac{xy + z^2}{xz} = 37$$

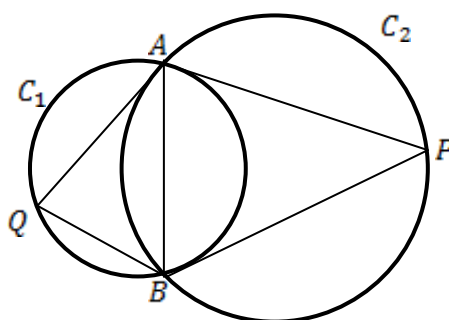
Dividindo uma equação por outra, obtemos

$$\frac{xy + z^2}{yz} \cdot \frac{xz}{xy + z^2} = \frac{2015}{37} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{2015}{37} = 54 + \frac{17}{37}.$$

Assim, o inteiro mais próximo de $\frac{x}{y}$ é 54.

06. [Resposta:0800]

Solução:



Como AP é tangente a C_1 , $m(\widehat{QAB}) = m(\widehat{APB})$; analogamente, $m(\widehat{PAB}) = m(\widehat{AQB})$.

Portanto os triângulos AQB e PAB são semelhantes. Logo

$$\frac{AB}{PB} = \frac{QB}{AB} \Leftrightarrow AB = \sqrt{PB \cdot QB} = \sqrt{640 \cdot 1000} = 800.$$

Soluções Nível 2 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:

a)



b) O desenho é o mesmo do item anterior.

c) Não apertando os botões das linhas, existem 2^{2015} escolhas possíveis, entre apertar ou não, cada botão das colunas e todas essas escolhas produzem colorações diferentes. Além disso, apertar o botão da primeira linha para cada uma dessas colorações nos gera uma nova coloração, pois nas colorações anteriores não existem colunas com a mesma cor. Assim, existem $2 \times 2^{2015} = 2^{2016}$ colorações distintas usando-se apenas os botões das colunas e o botão da primeira linha. Qualquer coloração obtida usando-se apenas o botão da segunda linha e os botões de um conjunto C de colunas equivale a:

- 1) não mudar a cor dos quadrados da segunda linha que estão no conjunto C de colunas;
- 2) não mudar a cor dos quadrados da primeira linha que não estão no conjunto C de colunas;
- 3) mudar a cor dos quadrados da primeira linha que estão no conjunto C de colunas;
- 4) mudar a cor dos quadrados da segunda linha que não estão no conjunto C de colunas;

Essa mesma configuração pode ser obtida apertando-se o botão da primeira linha e os botões das colunas que não estão em C. Apertar os dois botões das linhas e um conjunto C de colunas é o mesmo que não apertar nenhum deles e apertar os botões das colunas que não estão em C. Assim, o uso do segundo botão não acrescenta novas colorações às que já foram mencionadas. Portanto, o total de colorações é 2^{2016} .

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- a) Exibir corretamente o desenho [3 pontos]
- b) Exibir corretamente o desenho [3 pontos]
- c)
 - Perceber que cada coloração aparece duas vezes usando-se todas as 2^{2017} possíveis escolhas dos botões. [2 pontos]
 - Escrever que o total de colorações distintas é 2^{2016} [2 pontos]

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si para o item c):

- Escrever a fração $\frac{2^{2017}}{2}$ como resposta. [3 pontos].

PROBLEMA 2:

A resposta é 38.

Seja $d = \text{mdc}(8n + 5, 5n + 8)$. Então d também é divisor de $-5(8n + 5) + 8(5n + 8) = 39$. A fração $\frac{8n+5}{5n+8}$ é irredutível quando $d \neq 1$. Assim, $d = 3$ ou $d = 13$ ou $d = 39$, ou mais simplesmente, é possível simplificar a fração por $k = 3$ ou por $k = 13$ (no caso em que $d = 39$, é possível simplificar por ambos).

- Se $k = 3$, $8n + 5$ e $5n + 8$ são múltiplos de 3, ou seja, $2n + 2 \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{3}$. Com isso, n pode ser 2, 5, 8, ..., 98, num total de 33 números.
- Se $k = 13$, $8n + 5$ e $5n + 8$ são múltiplos de 13, ou seja, $-5n + 5 \equiv 5n - 5 \pmod{13} \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{13}$. Os valores de n são 1, 14, 27, 40, 53, 66, 79, 92. Desses, 14, 53 e 92 já apareceram na lista anteriores, por deixarem resto 2 na divisão por 3. Assim, adicionamos mais $8 - 3 = 5$ números.

Com isso, o total pedido é $33 + 5 = 38$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

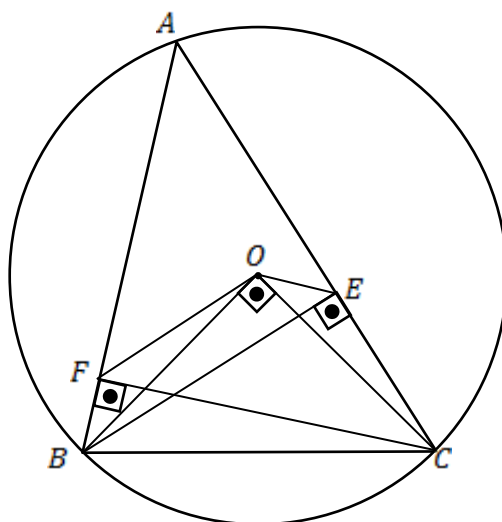
- Mostrou que d divide 39: [4 pontos]
- Caso $k = 3$: [+ 2 pontos]
- Caso $k = 13$: [+ 2 pontos]
- Concluiu: [+ 2 pontos]

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

- Só a resposta: [0 ponto]
- No que se segue, entendemos "testar um número" como escrever explicitamente a fração e afirmar, explicitamente, se ela é irredutível ou não.*
- Testou todos os números de 1 a 99 e cometeu um erro: [0 ponto]
- Testou todos os números de 1 a 99 corretamente: [8 pontos]
- Testou todos os números de 1 a 99 corretamente e contou incorretamente: [8 pontos]
- Testou todos os números de 1 a 99 corretamente e contou corretamente: [10 pontos]

PROBLEMA 3:

A resposta é 135° .



O arco BC mede $2m(\hat{A}) = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, logo $m(\widehat{BOC}) = 90^\circ = m(\widehat{BEC})$. Portanto o quadrilátero $BOEC$ é inscritível e $m(\widehat{EOC}) = m(\widehat{EBC}) = 90^\circ - m(\hat{C})$. Analogamente, $m(\widehat{FOB}) = 90^\circ - m(\hat{B})$. Portanto

$$m(\widehat{E\hat{O}F}) = m(\widehat{F\hat{O}B}) + 90^\circ + m(\widehat{E\hat{O}C}) = 90^\circ - m(\widehat{C}) + 90^\circ + 90^\circ - m(\widehat{B}) = 90^\circ + m(\widehat{A}) = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Escreveu explicitamente que $BOEC$ ou $BFOC$ é inscritível: [+ 5 pontos]
- Calculou $m(\widehat{E\hat{O}C}) = 90^\circ - m(\widehat{C})$ ou provou que $m(\widehat{O\hat{E}A}) = 45^\circ$ ou provou que OE é paralelo a CF : [+ 2 pontos]
- Calculou $m(\widehat{F\hat{O}B}) = 90^\circ - m(\widehat{B})$ ou provou que $m(\widehat{O\hat{F}A}) = 45^\circ$ ou provou que OF é paralelo a BE : [+ 2 pontos]
- Concluiu: [+ 1 ponto]

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

- Só a figura: [0 ponto]
- Só a resposta: [0 ponto]
- Observou, sem provar, que $m(\widehat{O\hat{E}A}) = 45^\circ$, $m(\widehat{O\hat{F}A}) = 45^\circ$, ou ambos: [0 ponto]
- Calculou, com trigonometria ou outra ferramenta, a medida OE ou OF , ou ambas, em função dos lados, ângulos e/ou circunraio de ABC : [1 ponto]
- Observou, sem provar, que $OEHF$, em que H é o encontro das alturas de ABC , é um paralelogramo: [1 ponto]