38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

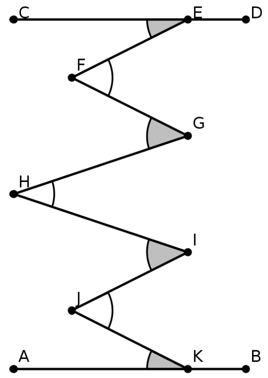
2ª Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)

GABARITO PARTE A - Cada problema vale 5 pontos

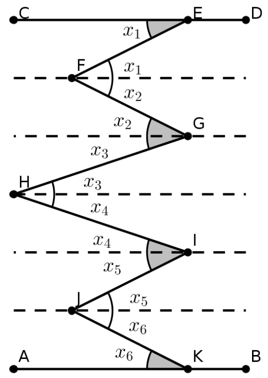
CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A
Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. NENHUM PONTO deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	0011	7532	0006	4087	0035	0052

1. [Resposta: 0011**]**
Solução: Iniciaremos esta solução com um comentário sobre um resultado geral. No desenho abaixo, temos duas retas paralelas e uma linha poligonal simples.



Por cada um dos vértices da linha poligonal, trace uma paralela ao segmento AB. Vários pares de ângulos alternos internos serão formados como indica a figura abaixo:



Cada um dos ângulos marcados possui exatamente um representante entre os ângulos brancos e cinzas. Assim, cada uma dessas somas de ângulos vale $x_1 + x_2 + \ldots + x_6$.
O resultado anterior é popularmente conhecido como "Teorema dos Bicos". No desenho do problema original, os ângulos cinzas serão os ângulos internos aos quadrados e os ângulos brancos serão os demarcados na figura. Assim,

$$\begin{aligned} 47^\circ + 122^\circ + x^\circ &= 90^\circ + 90^\circ \\ x^\circ &= 11^\circ. \end{aligned}$$

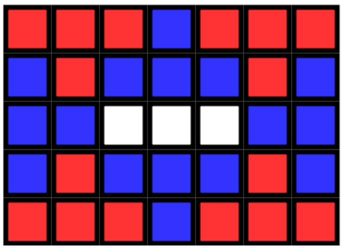
2. [Resposta: 7532]
Solução: O dígito das unidades do produto do enunciado é o dígito das unidades da multiplicação $C \times B$. Dentre os seis possíveis produtos de dois números dentre os quatro mencionados no enunciado, o único que também aparece como dígito das unidades de um de seus produtos associados é o 5. Portanto, $B = 5$. Como o número CC é múltiplo de 11, o produto final $DBBAB$ também é múltiplo de 11. Daí, pelo critério de divisibilidade por 11, $11 \mid (D+5+5) - (5+A) = 5 + D - A$. Em virtude da limitação dos algarismos, temos $0 = 5 + 2 - 7 \le 5 + D - A \le 5 + 9 - 2 = 12$. Daí, $5 + D - A = 0$ ou 11. No primeiro caso, a única solução é $D = 2$ e $A = 7$. No segundo, não temos solução, pois não existem dois dígitos no conjunto dado inicialmente que diferem por 6. Finalmente, tendo encontrado os valores de A, B e D, obtemos $C = 3$ e $ABCD = 7532$.

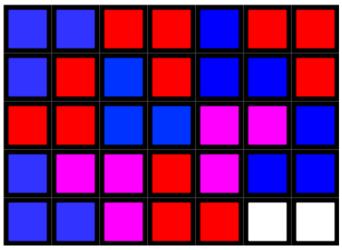
3. [Resposta: 0006]
Solução: A equação pode ser reescrita como $(b-4x)^2+(xb-9)^2=0$. Como a equação admite uma raiz real x, devemos ter $b-4x=0$ e $xb-9=0$. Claramente $x \neq 0$, portanto, $b^2 = 4x \cdot \dfrac{9}{x} = 36$ e $b=6$.

4. [Resposta: 4087]
Solução: Como $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 3 \cdot 2! = 6$, $4! = 4 \cdot 3! = 24$, $5! = 5 \cdot 4! = 120$, $6! = 6 \cdot 5! = 720$, $7! = 7 \cdot 6! = 5040$ e $8! = 8 \cdot 7! = 40320$, $1!+2!+\cdots+7! < 100000 < 1!+2!+\cdots+8!$, e o número na posição 10000 é obtido tirando os primeiros $1!+2!+\cdots+7!$ números de 10000:

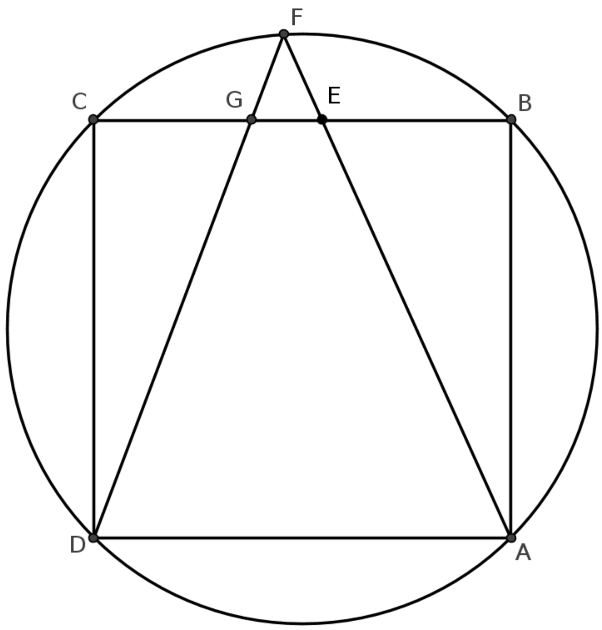
$$10000-1!-2!-\cdots-7! = 4087.$$

5. [Resposta: 0035]
Solução: Sendo k a quantidade de peças do tipo 1, a quantidade de casas no tabuleiro é $mn = 4k+3 = 4(k+1)-1$. Além disso, sendo ℓ a quantidade de peças do tipo 2, a quantidade de casas no tabuleiro é $mn = 3\ell+2 = 3(\ell+1)-1$. Logo $mn+1 = 4(k+1) = 3(\ell+1)$ é múltiplo de 4 e 3, e é portanto múltiplo de 12. Com isso, mn pode ser igual a $11, 23, 35, \ldots$. Como 11 e 23 são primos, nesse caso o tabuleiro teria uma linha ou uma coluna, e não é possível preencher com peças do tipo 1 nem do tipo 2.
Para $m=5$ e $n=7$, temos as seguintes possibilidades de preencher o tabuleiro:





6. [Resposta: 0052]
Solução:



Pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo EBA, temos

$$EA = \sqrt{EB^2+BA^2} = \sqrt{25+144} = 13.$$

A Pontência do Ponto E em relação ao círculo Γ, nos diz que $FE \cdot EA = CE \cdot EB$. Como $CE = 12 - EB$, segue que

$$FE = \frac{7 \cdot 5}{13}.$$

Como $CB \parallel DA$, temos $\triangle FEG \simeq FDA$. Daí

$$\begin{aligned}
\frac{EG}{AD} &= \frac{EF}{AF} \\
\frac{EG}{DA - EG} &= \frac{EF}{AF - EF} \\
\frac{EG}{12 - EG} &= \frac{35}{169}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{X}{Y} = EG = \frac{35}{17}.$$

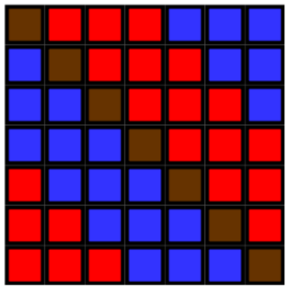
Portanto, $X + Y = 52$.

38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)

GABARITO PARTE B - Cada problema vale 10 pontos

PROBLEMA 1. Como há três cores para $7 = 3 \cdot 2 + 1$ casas em cada fila, cada linha tem pelo menos 3 casas vermelhas e cada coluna tem pelo menos 3 casas azuis. Logo o tabuleiro tem pelo menos $3 \cdot 7 = 21$ casas vermelhas e $3 \cdot 7 = 21$ casas azuis.
Suponha que há pelo menos 22 casas vermelhas. Assim, pelo princípio da casa dos pombos, alguma coluna tem pelo menos 4 casas vermelhas, o que não é possível pois deveria haver pelo menos mais 4 casas azuis. Da mesma maneira mostramos que não é possível haver 22 ou mais casas azuis.
Logo há 21 casas vermelhas, 21 casas azuis e $49 - 21 - 21 = 7$ casas marrons. O seguinte exemplo mostra a existência de um tabuleiro com essas condições.



Critério de Correção

a)
Concluir que cada linha possui pelo menos 3 casas vermelhas(ou que cada coluna possui pelo menos 3 casas azuis). **[2 pontos]**
Mostrar que o tabuleiro deve possuir pelo menos 21 casas vermelhas. **[2 pontos]**

b)
Mostrar que não podem existir mais de 21 casas vermelhas ou mostrar que devem existir pelo menos 7 casas marrons. **[2 pontos]**
Exibir um exemplo de pintura do tabuleiro satisfazendo as condições do enunciado. **[4 pontos]**

PROBLEMA 2. Como $2^7 > 100$, e 2 é o menor número primo, nenhum número de dois dígitos pode ter mais que 6 fatores primos em sua fatoração. Além disso, como $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > 100$, nenhum número de dois dígitos pode pode ter mais que três fatores primos distintos. Assim, a fatoração em primos de um número de dois dígitos é da forma $p^x q^y r^z$, com $x + y + z \leq 6$ e p, q e r primos distintos. Com essas restrições, um número de dois dígitos possui no máximo 12 divisores positivos. Como não existe um inteiro de dois dígitos com 11 divisores, pois nenhum número de dois dígitos possui 10 fatores primos, a quantidade máxima de inteiros da lista é $11 - 1 = 10$. Um exemplo de lista é:

$$13, 2\underline{5}, 3\underline{5}, 1\underline{6}, 2\underline{8}, \underline{6}4, 5\underline{6}, 3\underline{6}, 4\underline{8}, \underline{9}6.$$

Em cada número da lista, sublinhamos o dígito que é maior que um dos dígitos do número que o precede na lista.
Critério de Correção:

Mostrar que não existe número de dois dígitos com 13 ou mais divisores positivos. [2 pontos] **[2 pontos]**
Mostrar que não existe número de dois dígitos com exatamente 11 divisores positivos. **[2 pontos]**
Exibir uma lista satisfazendo as condições do enunciado com 10 números **[6 pontos]**

PROBLEMA 3. Seja H a interseção de AD e BG. Como AD é diâmetro, $\angle AGD = \angle ABD = 90°$, segue que $\angle BAG + \angle BDG = 180°$. Se $[XYZ]$ denota a área de um triângulo XYZ, temos

$$\begin{aligned} \frac{[AGB]}{[BDG]} &= \frac{AB \cdot AG \cdot \operatorname{sen} \angle BAG}{BD \cdot DG \cdot \operatorname{sen} \angle BDG} \\ &= \frac{4 \cdot AG}{8 \cdot GD} \end{aligned}$$

Além disso, como a área entre triângulos de mesma altura é a razão entre suas bases correspondentes, temos

$$\begin{aligned}\frac{[AHB]}{[BHD]} = \frac{[AHG]}{[HGD]} &= \frac{AH}{HD} \\ \frac{[AHB]+[AHG]}{[BHD]+[HGD]} &= \frac{AH}{HD} \\ \frac{[ABG]}{[BGD]} &= \frac{AH}{HD}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Ceva,

$$\begin{aligned}\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA} &= 1 \\ \frac{DH}{HA} &= 3.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{AG}{GD} &= 2\cdot\frac{[AGB]}{[BDG]} \\ &= 2\cdot\frac{AH}{HD} \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Resolução alternativa para a primeira parte:

Como AD é diâmetro e $\angle ABD = 90^\circ$, o quadrilátero $ABDG$ é cíclico. Daí, $\angle AGB = \angle ADB$ e $\angle BGD = \angle BAD$.

Pelo Teorema da Bissetriz Interna Generalizada, temos:

$$\begin{aligned}\frac{AG}{GD} &= \frac{AH\cdot \operatorname{sen} BGD}{HD\cdot \operatorname{sen} AGB} \\ &= \frac{AH\cdot \operatorname{sen} BAD}{HD\cdot \operatorname{sen} ADB} \\ &= \frac{AH}{HD}\cdot\frac{BD}{AD}\cdot\frac{AD}{AB} \\ &= \frac{AH}{HD}\cdot\frac{BD}{AB} \\ &= 2\cdot\frac{AH}{HD}.\end{aligned}$$

Critério de Correção

Primeira Parte:

Afirmar que $\angle BAG + \angle BDG = 180^\circ$ ou que $\operatorname{sen} BAG = \operatorname{sen} BDG$ **[1 ponto]**

Obter $\dfrac{AG}{GD} = \dfrac{2[AGB]}{[DBG]}$. **[2 pontos]**

Obter $\dfrac{[ABG]}{[BGD]} = \dfrac{AH}{HD}$. **[2 pontos]**

As seguinte pontuação não se acumulam com as anteriores:

Aplicar o Teorema da Bissetriz Interna Generalizado e obter

$\dfrac{AG}{GD} = 2\cdot\dfrac{AH}{HD}$. **[5 pontos]**

Segunda Parte:

Aplicar o Teorema de Ceva no Triângulo ABD ou concluir que $\dfrac{DH}{HA} = 3$ **[4 pontos]**

Concluir o problema **[1 ponto]**