37ª Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	0931	0800	0090	0252	0012	0141

01. [Resposta: 0931]

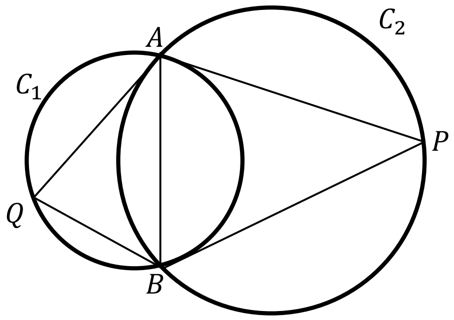
Solução: Seja r a solução correta de $ax = b$. A solução de $bx = a$ é $x = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{r}$, logo

$$\frac{1}{r} = r - 60 \Leftrightarrow r^2 - 60r - 1 = 0 \Leftrightarrow r = 30 \pm \sqrt{901}.$$

Como r é da forma $m + \sqrt{n}$, m, n inteiros, $m = 30$ e $n = 901$.

02. [Resposta: 0800]

Solução:



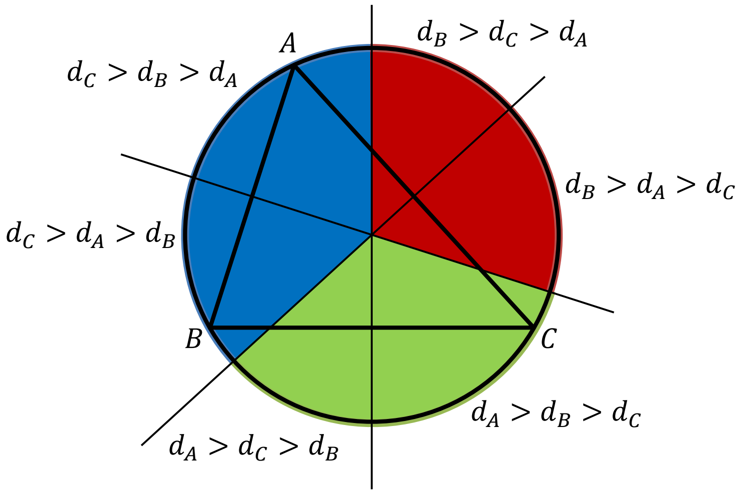
Como AP é tangente a C_1, $m(Q\hat{A}B) = m(A\hat{P}B)$; analogamente, $m(P\hat{A}B) = m(A\hat{Q}B)$. Portanto os triângulos AQB e PAB são semelhantes. Logo

$$\frac{AB}{PB} = \frac{QB}{AB} \Leftrightarrow AB = \sqrt{PB \cdot QB} = \sqrt{640 \cdot 1000} = 800.$$

03. [Resposta: 0090]

Solução: Dados dois pontos X e Y, considere a mediatriz de XY, que é o conjunto dos pontos que estão à mesma distância de X e de Y. A mediatriz divide o plano em duas regiões: uma, que contém Y, são os pontos que estão mais distantes de X do que de Y, e a outra, que contém X, consiste nos pontos mais distantes de Y do que de X.

Usando essa ideia, podemos construir a seguinte figura, que mostra a ordem das distâncias d_A, d_B e d_C do ponto para cada vértice.



Com isso, a probabilidade pedida corresponde à área vermelha, que é proporcional ao ângulo obtuso entre as mediatrizes de BC e AB, que por usa vez é igual ao suplementar do ângulo $A\hat{B}C$. Logo a probabilidade é $\frac{180°-80°}{360°} = \frac{5}{18}$, e temos $p = 5$ e $q = 18 \Longrightarrow p \cdot q = 90$.

04. [Resposta: 0252]
Solução: Sejam $a < b < c < d < e$ os elementos de um conjunto largo. Assim, $b > a + 1$, $c > b + 2$, $d > c + 3$ e $e > d + 4$, ou seja, $1 \leq a < b - 1 < c - 3 < d - 6 < e - 10 \leq 10$.

Desta forma, $\{a, b - 1, c - 3, d - 6, e - 10\}$ é um subconjunto de $\{1,2,3, \ldots ,10\}$. Reciprocamente, se $\{x, y, z, w, t\}$ é um subconjunto de $\{1,2,3, \ldots ,10\}$ com $x < y < z < w < t$ então $\{x, y + 1, z + 3, w + 6, t + 10\}$ é um conjunto largo, pois $y + 1 - x > 1$, $z + 3 - (y + 1) > 2$, $w + 6 - (z + 3) > 3$ e $t + 10 - (w + 6) > 4$.

Com isso, a quantidade de subconjuntos largos é igual à quantidade de subconjuntos de 5 elementos de $\{1,2,3, \ldots ,10\}$, que é $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252$.

05. [Resposta: 0012]
Solução: Note que se $x > 0$ então $f(2x) = x \neq 0$, ou seja, f não tem raízes pares além de 0. Além disso, $f(4x + 1) = g(2x) = f(x)$, e $f(4x + 3) = g(2x + 1) = x \neq 0$. Assim, a única raiz na forma $4x + 3$ é 3.

Faltam encontrar as raízes da forma $4x + 1$: ela é raiz se, e somente se, x é raiz. Com isso, podemos reduzir todas as raízes para algum número menor do que 4. Temos $f(0) = 0$, $f(1) = f(0) = 0$, $f(2) = 1$ e $f(3) = 0$. Com isso, as raízes são obtidas iterando as sequências a_n e b_n definidas por $a_0 = 0$ e $a_n = 4a_{n-1} + 1$ e $b_0 = 3$ e $b_n = 4b_{n-1} + 1$. A seguinte tabela nos dá as raízes até 2015:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	1	5	21	85	341	1365	> 2015
b_n	3	13	53	213	853	> 2015		

Logo temos $7 + 5 = 12$ raízes entre 0 e 2015.

Observação: pode-se provar que as raízes são da forma $\frac{4^k - 1}{3}$ ou $\frac{10 \cdot 4^k - 1}{3}$, k inteiro não negativo.

06. [Resposta: 0141]

Solução: Dividindo a primeira equação por c, a segunda por a e a terceira por b, obtemos

$$\frac{1}{abc} = \frac{b}{c} + 2, \quad \frac{1}{abc} = 2 \cdot \frac{c}{a} + 3, \quad \frac{1}{abc} = 3 \cdot \frac{a}{b} + 1.$$

Seja $P = \frac{1}{abc}$. Então $\frac{b}{c} = P - 2$, $\frac{c}{a} = \frac{P-3}{2}$ e $\frac{a}{b} = \frac{P-1}{3}$. Multiplicando as três equações, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{(P-2)(P-3)(P-1)}{6} &\Leftrightarrow 6 = P^3 - 6P^2 + 11P - 6 \\ &\Leftrightarrow P^3 - 6P^2 + 11P - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow P = 4 \text{ ou } P^2 - 2P + 3 = 0. \end{aligned}$$

Como a, b, c são reais, $P = 4$. Com isso, $abc = \frac{1}{4}$, $\frac{b}{c} = 2$, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ e $\frac{a}{b} = 1$, ou seja, $a = b = 2c$. Pode-se verificar que $a = b = 2c$ satisfaz a equação. Com isso, $2c \cdot 2c \cdot c = \frac{1}{4} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ e $a = b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Logo $(a+b+c)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)^3 = \frac{125}{16}$. Assim, a soma é $125 + 16 = 141$.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

PROBLEMA 1:
A resposta é 2^{2051}. Primeiro, note que o que determina a cor final da casinha é a paridade da soma da quantidade de vezes que os botões da sua linha ou da sua coluna são apertados. Com isso, concluímos que:

- apertar duas vezes o mesmo botão é o mesmo que não apertar o botão;
- a ordem em que os botões são apertados não importa.

Com isso, podemos escolher apertar ou não cada botão, dando duas escolhas para cada, em um total de 2^{2052} combinações dos botões.

Sejam L e C os conjuntos dos botões apertados nas linhas e nas colunas, respectivamente. Denote por $\overline{L}$ e $\overline{C}$ os conjuntos dos botões **não** apertados nas linhas e nas colunas, respectivamente. Portanto:

- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a L e C mudam de estado duas vezes, ou seja, se mantêm iguais;
- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a $\overline{L}$ e C mudam de estado uma vez, ou seja, mudam de cor;
- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a L e $\overline{C}$ mudam de estado uma vez, ou seja, mudam de cor;
- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a $\overline{L}$ e $\overline{C}$ não mudam de cor.

Em resumo: (L, C) e $\left(\overline{L}, \overline{C}\right)$ não mudam e $\left(\overline{L}, C\right)$ e $\left(L, \overline{C}\right)$ mudam.

Note que se fizermos outra combinação de botões, correspondentes a $\overline{L}$ e $\overline{C}$ (ou seja, apertamos os botões que não apertamos na outra combinação e vice-versa), obtemos a mesma configuração. Reciprocamente, se temos uma configuração, podemos identificar as casas que não mudaram, e com isso, encontrar (L, C) ou $\left(\overline{L}, \overline{C}\right)$. Mas esses pares são correspondentes entre si, então cada tabuleiro é gerado por exatamente dois pares.

Então cada configuração pode ser obtida de duas maneiras e logo há $\frac{2^{2052}}{2} = 2^{2051}$ configurações.

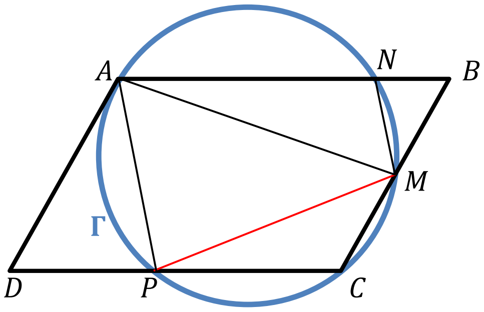
CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Obteve a resposta correta: **[+ 2 pontos]**
- Notou que podemos decidir entre apertar ou não cada botão: **[+ 1 ponto]**
- Investigou o que acontece com as interseções de linhas e colunas: **[+ 3 pontos]**
- Mostrou que (L, C) e $\left(\overline{L}, \overline{C}\right)$ dão o mesmo tabuleiro: **[+ 2 pontos]**
- Verificou que cada tabuleiro gera os pares (L, C) e $\left(\overline{L}, \overline{C}\right)$: **[+ 2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:

- Notou que a ordem não importa: **[1 ponto]**
- Tentou casos particulares: **[0 ponto]**
- Escreveu somente a resposta incorreta 2^{2052}: **[0 ponto]**

PROBLEMA 2:
A resposta é 7.



Usando potência de ponto, obtemos $BM \cdot BC = BN \cdot BA$ e $DA^2 = DP \cdot DC$. Dividindo as duas equações obtemos $\frac{BM}{DA} = \frac{BN}{DP}$. Sendo $A\hat{D}P \cong N\hat{B}M$, os triângulos ADP e MBN são semelhantes pelo caso LAL. Portanto $A\hat{P}D \cong M\hat{N}B$ e, sendo $AB \parallel CD$, $MN \parallel AP$. Logo $ANMP$ é um trapézio, e sendo inscrito, isósceles. Dessa maneira, $MP = AN = AB - BN = AB - \frac{BM \cdot BC}{AB} = 8 - \frac{2\cdot 4}{8} = 7$.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Mostrou que $ANMP$ é um trapézio isósceles: **[+ 8 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:
- Só a resposta: **[0 ponto]**
- Só a figura: **[0 ponto]**
- Marcações de ângulos: **[0 ponto]**
- Calculou DP: **[1 ponto]**
- Mostrou que os triângulos ADP e MAP são semelhantes ou que $A\hat{P}D \cong M\hat{P}A$: **[3 pontos]**
- Mostrou que os triângulos ADP e MBN são semelhantes: **[5 pontos]**
- Mostrou que MN é paralelo a AP: **[6 pontos]**

A pontuação a seguir se acumula com as anteriores:
- Calculou AN: **[+ 2 pontos]**

Alguns valores de segmentos para referência (não valem pontos exceto se indicado acima):

$$DP = 2;\ \ CP = 6;\ \ MN = \frac{\sqrt{14}}{2};\ \ AP = \sqrt{14};\ \ AM = 2\sqrt{14}$$

PROBLEMA 3:
A resposta é 92.

Usaremos o seguinte lema, que pode ser utilizado sem demonstração:
Lema. $\mathrm{mdc}(a^r - 1, a^s - 1) = a^{\mathrm{mdc}(r,s)} - 1$. Em particular, $a^r \equiv 1 \pmod{m}$ e $a^s \equiv 1 \pmod{m}$ implica $a^{\mathrm{mdc}(r,s)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Por completude, demonstramos o lema: seja $d = \mathrm{mdc}(a^r - 1, a^s - 1)$. Então $a^r \equiv 1 \pmod{d}$ e $a^s \equiv 1 \pmod{d}$, e portanto $a^{rx+sy} \equiv 1 \pmod{d}$ para todos x, y inteiros. Pelo teorema de Bezóut, o menor valor inteiro de $rx + sy$, x, y inteiros, é $\mathrm{mdc}(r, s)$, logo $a^{\mathrm{mdc}(r,s)} \equiv 1 \pmod{d}$, ou seja, $d \mid a^{\mathrm{mdc}(r,s)} - 1 \Longrightarrow d \le a^{\mathrm{mdc}(r,s)} - 1$. Por outro lado, como $\mathrm{mdc}(r, s)$ divide r e s, $a^r \equiv 1 \left(\mathrm{mód}\ a^{\mathrm{mdc}(r,s)} - 1\right)$ e $a^s \equiv 1 \left(\mathrm{mód}\ a^{\mathrm{mdc}(r,s)} - 1\right)$, logo $a^{\mathrm{mdc}(r,s)} - 1$ é divisor comum de $a^r - 1$ e $a^s - 1$, e logo $d \ge a^{\mathrm{mdc}(r,s)} - 1$. Com isso, $d = a^{\mathrm{mdc}(r,s)} - 1$.

Primeiro veja que $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, então basta que $a^{2^n} - 1$ seja múltiplo de 5, 13 e 31 para algum n. O número a não pode ser múltiplo de nenhum desses primos.

- Pelo teorema de Fermat, $a^{\phi(5)} \equiv 1 \pmod{5} \Leftrightarrow a^4 \equiv 1 \pmod{5}$; assim, a pode ser qualquer inteiro positivo não múltiplo de 5.
- Além disso, $a^{\phi(13)} \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Como $\mathrm{mdc}(2^n, 12) \leq 4$, devemos ter
$$a^{\mathrm{mdc}(2^n,12)} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow a^4 \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow a \equiv \pm 1, \pm 5 \pmod{13}.$$
- Finalmente, $a^{\phi(31)} \equiv 1 \pmod{31} \Leftrightarrow a^{30} \equiv 1 \pmod{31}$, e temos
$$a^{\mathrm{mdc}(2^n,30)} \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{31} \Leftrightarrow a \equiv \pm 1 \pmod{31}.$$

Com isso, podemos formar a seguinte tabela com os menores valores de $a > 1$, não múltiplos de 5, que satisfazem cada sistema de congruências:

	$a \equiv 1 \pmod{13}$	$a \equiv 5 \pmod{13}$	$a \equiv 8 \pmod{13}$	$a \equiv 10 \pmod{13}$
$a \equiv 1 \pmod{31}$	$a = 404$	$a = 187$	$a = 528$	$a = 311$
$a \equiv 30 \pmod{31}$	$a = 92$	$a = 278$	$a = 216$	$a = 402$

O valor mínimo de a é, então, 92. Nesse caso, podemos escolher $n = 2$, e $92^4 - 1$ é múltiplo de 2015.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
- Viu módulo 5 e concluiu que basta a não ser múltiplo de 5: **[+ 2 pontos]**
- Viu módulo 13 e concluiu que basta $a \equiv \pm 1, \pm 5$: **[+ 3 pontos]**
- Viu módulo 31 e concluiu que basta $a \equiv \pm 1$: **[+ 3 pontos]**
- Resolveu os oito sistemas de congruências e concluiu: **[+ 2 pontos]**

As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores nem entre si:
- Reduziu o problema a ver módulo 5, 13 e 31: **[1 ponto]**
- Enunciou o lema: **[0 ponto]**
- Demonstrou o lema: **[2 pontos]**
- Só a resposta: **[2 pontos]**