38^{a} OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2^{a} Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

GABARITO PARTE A - Cada problema vale 5 pontos

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A
Na parte A serão atribuídos **5 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 30. NENHUM PONTO deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	4087	0024	0008	0060	0021	0035

1. **[Resposta: 4087]**
Solução: Como $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 3 \cdot 2! = 6$, $4! = 4 \cdot 3! = 24$, $5! = 5 \cdot 4! = 120$, $6! = 6 \cdot 5! = 720$, $7! = 7 \cdot 6! = 5040$ e $8! = 8 \cdot 7! = 40320$, $1! + 2! + \cdots + 7! < 100000 < 1! + 2! + \cdots + 8!$, e o número na posição 10000 é obtido tirando os primeiros $1! + 2! + \cdots + 7!$ números de 10000:

$$10000 - 1! - 2! - \cdots - 7! = 4087.$$

2. **[Resposta: 0024]**
Solução: Temos $r^2 = 12r + 12 \implies r^3 = 12r^2 + 12r = 12(12r + 12) + 12r \iff r^3 = 156r + 144 \implies r^4 = 156r^2 + 144r = 156(12r + 12) + 144r \iff r^4 = 12 \cdot (168r + 156)$.
Logo $r = \frac{r^3 - 144}{156} = \frac{r^4/12 - 156}{168} \implies 14(r^3 - 144) = 13(r^4/12 - 156) \iff r^4 - \frac{168}{13}r^3 - \frac{144}{13} = 0$, ou seja, r é raiz de $x^4 - \frac{168}{13}x^3 - \frac{144}{13} = 0$.
Para mostrar que tal polinômio é único, veja que $r^4 = ar^3 + b = cr^3 + d \implies (a - c)r^3 = d - b$, de modo que ou r é raiz cúbica de um racional (o que não é possível pois $r = 6 \pm 4\sqrt{3}$) ou $a - c = 0 \iff a = c \implies b = d$.
Com isso, $a + b = \frac{168}{13} + \frac{144}{13} = 24$.

3. **[Resposta: 0008]**
Solução:
Temos $AC = AB - BC = 4 - 2 = 2$. Pelo teorema de Ceva, sendo H a interseção de BG e AD,

$$\frac{DH}{HA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BE}{ED} = 1 \iff \frac{DH}{HA} = \frac{ED}{BE} \iff EH \parallel AB.$$

Então $EH \perp BE$, e sendo HED e ABD semelhantes,

$$\frac{EH}{AB} = \frac{ED}{BD} \iff EH = \frac{4 \cdot 6}{8} = 3.$$

Finalmente, como $m(A\hat{B}D) + m(A\hat{G}D) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, o quadrilátero $ABDG$ é inscritível. Com isso,

$$\frac{AG}{GD} = \frac{1}{\operatorname{tg}(G\hat{A}D)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(G\hat{B}D)} = \frac{BE}{HE} = \frac{2}{3}.$$

Logo $p = 2$, $q = 3$ e $p^q = 2^3 = 8$.

4. **[Resposta: 0060]**
Solução:
Primeiro note que $n \le 60$ pois temos os triângulos semelhantes ao $(3, 4, 5)$, de perímetro 12, e $(5, 12, 13)$, de perímetro 30, e $mmc(30, 12) = 60$. Com isso, usamos os triângulos $(15, 20, 25)$ e $(10, 24, 26)$.
Agora, suponha que a é o menor cateto. Note que $a^2 = (c - b)(c + b)$, e que $c - b$ e $c + b$ têm a mesma paridade, e $c - b < c + b$. Encontraremos triângulos *primitivos*, ou seja, b e c primos entre si para valores pequenos de a:

- Primeiro note que o perímetro é maior do que $3a$, logo se o perímetro é menor que 60 então $a < 20$. Além disso, é imediato que $a \neq 1$, e que $mdc(c - b, c + b) \le 2$. Finalmente, como $b \ge a$, $(c + b) - (c - b) = 2b \ge 2a$.
- $a = 2$: $(c - b)(c + b) = 4$ não tem solução pois $c - b$ e $c + b$ deveriam ser ambos pares e, portanto, iguais a 2.
- Se a é primo ímpar, $(c - b)(c + b) = a^2 \iff c - b = 1$ e $c + b = a^2$, e obtemos perímetro $a^2 + a$, que é menor que 60 se, e somente se, $a \le 5$. Obtemos $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$, respectivamente.

- Se $a = 2p$, p primo, $(c-b)(c+b) = 4p^2$; $c-b$ e $c+b$ são ambos pares, logo $c-b = 2$ e $c+b = 2p^2$, e obtemos $c = p^2+1$ e $b = p^2-1$, que não são primos entre si para p ímpar; para $p = 2$, temos $c = 5$ e $b = 3$.

- Sobram $a \in \{8, 9, 12, 15, 16, 18\}$. Para $a = 8$, temos $(c-b)(c+b) = 64$, de modo que $c-b = 2$ e $c+b = 32$, para o qual o perímetro é 40, triângulo $(8, 15, 17)$. Para $a = 9$, temos $(c-b)(c+b) = 81$, e temos $c-b = 1$ e $c+b = 81$, para o qual o perímetro é 90. Para $a = 12$, temos $(c-b)(c+b) = 144$, e temos $c-b = 2$ e $c+b = 72$, com perímetro 84. A outra possibilidade para distribuir os fatores é $c-b = 8$ e $c+b = 18$, mas aí $b < a$. Para $a = 15$, temos $(c-b)(c+b) = 225$, e temos $c-b = 1$ e $c+b = 225$, para o qual o perímetro é 240, ou $c-b = 9$ e $c+b = 25$, para o qual $b < a$. Para $a = 16$, $(c-b)(c+b) = 256 \iff c-b = 2$ e $c+b = 128$, com perímetro 144. Finalmente, para $a = 18$, $(c-b)(c+b) = 18^2$ e $c+b \geq 81$ (pois todos os fatores 3 devem ir para o mesmo fator), perímetro pelo menos 99.

Com isso, os triângulos primitivos com perímetro menor do que 60 são $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ e $(8, 15, 17)$, de perímetros 12, 25 e 40. Com isso, verificamos que o menor *mdc* ocorre para 12 e 25, que é 60.

---

5. [Resposta: 0021]

Solução: Temos $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{10})$. Assim, $P(n)$ é o produto de pelo menos dez inteiros distintos. Tomando $a = 1$, temos exatamente dez inteiros distintos. Podemos fazer dois deles iguais a 1 e a -1, e os outros oito inteiros têm módulo pelo menos 2. Se tomarmos como esses inteiros p, $-p$, p^2, $-p^2$, p^3, $-p^3$, p^4 e $-p^4$, p primo, obtemos $P(n) = -p^{20}$, que tem 21 divisores positivos.

Se $P(n)$ tiver k fatores primos, então a quantidade de divisores positivos é pelo menos $(1+1)^k = 2^k$. Assim $k \leq 4$. Para $k = 4$, como cada um de oito inteiros tem pelo menos um fator primo, algum primo aparece duas vezes, e a quantidade de divisores positivos é pelo menos $(2+1)\cdot(1+1)^3 = 24$. Para $k = 3$, se algum primo aparece em quatro inteiros, algum dos outros dois aparece em outros dois e a quantidade de divisores é pelo menos $(4+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 30$; se todo primo aparece em três inteiros, algum outro aparece em três inteiros, e a quantidade de divisores é pelo menos $(3+1)\cdot(3+1)\cdot(1+1) = 32$.

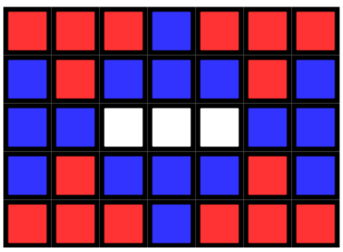
Falta o caso em que $P(n)$ tem exatamente dois divisores primos distintos. Mas só é possível ter menos de 21 divisores quando um deles aparece em um inteiro e o outro, em sete; caso contrário, a quantidade de divisores é $(d+1)(8-d+1) \geq 3\cdot 7 = 21$. Mas se um primo p só aparece em um inteiro, os outros sete devem ter pelo menos quatro expoentes diferentes em q, e a quantidade de fatores q é pelo menos $1+1+2+2+3+3+4 = 16$, e portanto há mais de $2\cdot 17 = 34$ divisores.

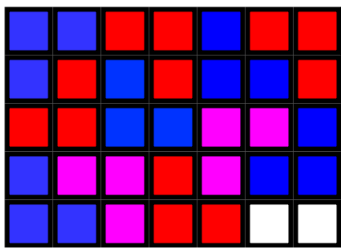
---

6. [Resposta: 0035]

Solução: Sendo k a quantidade de peças do tipo 1, a quantidade de casas no tabuleiro é $mn = 4k+3 = 4(k+1)-1$. Além disso, sendo ℓ a quantidade de peças do tipo 2, a quantidade de casas no tabuleiro é $mn = 3\ell+2 = 3(\ell+1)-1$. Logo $mn+1 = 4(k+1) = 3(\ell+1)$ é múltiplo de 4 e 3, e é portanto múltiplo de 12. Com isso, mn pode ser igual a $11, 23, 35, \ldots$. Como 11 e 23 são primos, nesse caso o tabuleiro teria uma linha ou uma coluna, e não é possível preencher com peças do tipo 1 nem do tipo 2.

Para $m = 5$ e $n = 7$, temos as seguintes possibilidades de preencher o tabuleiro:



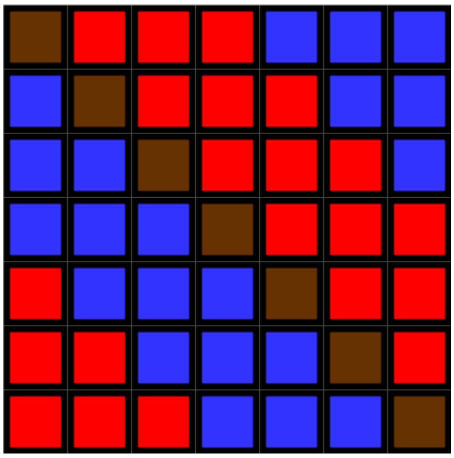


38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

GABARITO PARTE B - Cada problema vale 10 pontos

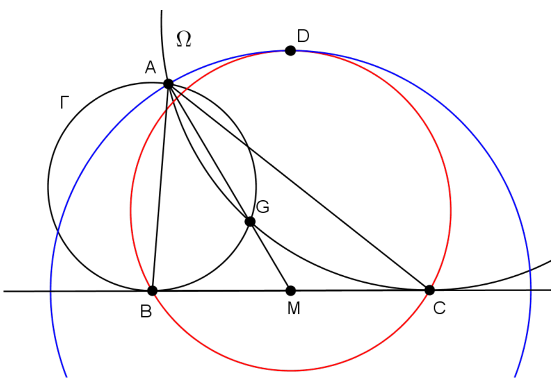
PROBLEMA 1. Como há três cores para $7 = 3 \cdot 2 + 1$ casas em cada fila, cada linha tem pelo menos 3 casas vermelhas e cada coluna tem pelo menos 3 casas azuis. Logo o tabuleiro tem pelo menos $3 \cdot 7 = 21$ casas vermelhas e $3 \cdot 7 = 21$ casas azuis.
Suponha que há pelo menos 22 casas vermelhas. Assim, pelo princípio da casa dos pombos, alguma coluna tem pelo menos 4 casas vermelhas, o que não é possível pois deveria haver pelo menos mais 4 casas azuis. Da mesma maneira mostramos que não é possível haver 22 ou mais casas azuis.
Logo há 21 casas vermelhas, 21 casas azuis e $49 - 21 - 21 = 7$ casas marrons. O seguinte exemplo mostra a existência de um tabuleiro com essas condições.



Critério de Correção

- Concluir que cada linha possui pelo menos 3 casas vermelhas (ou que cada coluna possui pelo menos 3 casas azuis) .... **[2 pontos]**
- Mostrar que o tabuleiro deve possuir pelo menos 21 casas vermelhas .... **[2 pontos]**
- Mostrar que não podem existir mais de 21 casas vermelhas ou mostrar que devem existir pelo menos 7 casas marrons .... **[2 pontos]**
- Exibir um exemplo de pintura do tabuleiro satisfazendo as condições do enunciado .... **[4 pontos]**

PROBLEMA 2. Seja $GM = k$ e $MA = 3k$. Sendo M a interseção das retas AG e BC, por potência de ponto temos $MG \cdot MA = MB^2 = MC^2 \implies MB = MC = k\sqrt{3}$. Considere o arco capaz de $60°$ que passa por B e C e o círculo de centro M e raio MA. Esses dois círculos se tangenciam no ponto médio D do arco BC, pois BCD é equilátero e, portanto, $MD = k\sqrt{3}$. Assim, A está fora ou sobre o ponto de tangência do arco capaz, de modo que $m(B\hat{A}C) \leq 60°$. O valor máximo ocorre para $A = D$.



Critério de Correção

- Calcular MB .... **[2 pontos]**
- Mostrar o exemplo em que $m(B\hat{A}C) = 60°$ .... **[1 ponto]**

- Mostrar que $m(B\hat{A}C) \leq 60°$ .... [7 pontos no total]
  - Construir os dois círculos (com descrição explícita no texto – só desenho não vale) ...... **[4 pontos]**
  - Concluir .... **[3 pontos]**

  OU

  - Mostrar que $\operatorname{cotg}(B\hat{A}C) = \frac{\sqrt{3}}{3\operatorname{sen}(A\hat{M}C)}$ .... **[5 pontos]**
  - Concluir .... **[2 pontos]**

  (Nenhuma das duas pontuações anteriores se soma com nenhuma das outras duas pontuações)

PROBLEMA 3. Podemos reescrever o 3-análogo $[n]_q$ na forma

$$[n]_3 = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Vamos contar a quantidade de fatores 5 em $\binom{2016}{38}_3$. Primeiro note que 5 divide $[n]_3$ se, e somente se, n é múltiplo de 4, pois $3^{4k+r} - 1 \equiv 3^r(3^4)^k - 1 \equiv 3^r - 1 \pmod 5$, $0 \leq r \leq 3$, e testando os valores de r vemos que $r = 0$. Agora, suponha que $n = 4 \cdot 5^\alpha m$, em que m não é múltiplo de 5. Com isso, $3^n - 1 = (3^{4\cdot 5^\alpha} - 1)((3^{4\cdot 5^\alpha})^{m-1} + (3^{4\cdot 5^\alpha})^{m-2} + \cdots + 1)$. Como $3^{4\cdot 5^\alpha} \equiv 1 \pmod 5$, o segundo fator é congruente módulo 5 a uma soma de m uns, ou seja, não tem fator 5. Finalmente,

$$3^{4\cdot 5^\alpha} - 1 = (3^{4\cdot 5^{\alpha-1}} - 1)((3^{4\cdot 5^{\alpha-1}})^4 + \cdots + 1).$$

Se $t = 5q + r$, $0 \leq r \leq 4$, então $t^5 = (5q + r)^5 \equiv \binom{5}{1}(5q)r^4 + r^5 \equiv r^5 \pmod{25}$. Assim, indutivamente, $t^{5^k} \equiv r^{5^k} \pmod{25}$. Aplicando o resultado para $t = 3^4 = 81$, temos que o segundo fator do produto acima é congruente a 5 módulo 25, e portanto $3^{4\cdot 5^\alpha} - 1$ tem exatamente um fator 5 a mais do que $3^{4\cdot 5^{\alpha-1}} - 1$; como $3^4 - 1$ tem um fator 5, $3^n - 1$, e portanto $[n]_3$, tem um total de $\alpha + 1$ fatores 5.
Note que ainda podemos cortar os q-análogos no fatorial (ou seja, $[n+1]!_q = [n+1]_q \cdot [n]_q!$). Com isso, podemos escrever

$$\binom{2016}{38}_3 = \frac{[2016]_3[2015]_3 \ldots [1979]_3}{[38]_3!}.$$

Entre 1979 e 2016 temos 10 múltiplos de 4, entre os quais 1980 tem um fator 5 e 2000 tem 3 fatores 5; entre 1 e 38 temos 9 múltiplos de 4, sendo 20 com 1 fator 5. Com isso, a quantidade de fatores 5 em $\binom{2016}{38}_3$ é $1 + 3 = 4$.
Uma conta análoga mostra que se $n = 2^\alpha m$, m ímpar, e $\alpha > 0$, então $[n]_3$ tem $\alpha + 1$ fatores 2, e que $[n]_3$ não tem fatores 2 para n ímpar. Com isso, como entre 1979 e 2016 há 19 pares, 10 múltiplos de 4, 5 múltiplos de 8, 3 múltiplos de 16, um múltiplo de 32 e um múltiplo de 64, e entre 1 e 38 há 19 pares, 9 múltiplos de 4, 4 múltiplos de 8, 2 múltiplos de 16 e um múltiplo de 32, a quantidade de fatores 2 em $\binom{2016}{38}_3$ é $6 - 1 = 5$.
Logo a quantidade de zeros no final de $\binom{2016}{38}_3$ é 4. **Critério de Correção**

- Calcular a quantidade de fatores 5 em $[n]_3$ .... **[2 pontos]**
- Calcular a quantidade de fatores 5 em $\binom{2016}{38}_3$ .... **[3 pontos]**
- Calcular a quantidade de fatores 2 em $[n]_3$ .... **[2 pontos]**
- Calcular a quantidade de fatores 2 em $\binom{2016}{38}_3$ .... **[3 pontos]**
- **Observação**: é permitido usar diretamente o teorema *Lifting the Exponent* para cálculo da quantidade de fatores: sendo $\nu_p(k)$ a quantidade de fatores primos p em k, $\nu_p(a^n - 1) = \nu_p(a - 1) + \nu_p(n)$ se p é primo ímpar e $a - 1$ é múltiplo de p e $\nu_2(a^n - 1) = \nu_2(a^2 - 1) + \nu_2(n) - 1$ se a é ímpar.