XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Cada questão vale **5 pontos** se, e somente se, para cada uma o resultado escrito pelo aluno coincidir com o gabarito abaixo. Cada questão vale 0 ou 5, isto é, não tem notas parciais. A nota máxima para esta parte é 30.

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Resposta	18	2	214	182	10	24

01. O tanque contém uma mistura de 30 litros, sendo $0,2\times 30=6$ litros de álcool e 30 – 6 = 24 litros de gasolina. Portanto, para que as quantidades de gasolina e álcool fiquem iguais, devem ser colocados no tanque 24 – 6 = **18** litros de álcool.

02. Como 2 é a média aritmética de 1 e *a*, podemos escrever $\frac{1+a}{2}=2$, logo $1+a=4\Leftrightarrow a=3$; portanto, $b=\frac{1+2+3}{3}=2$; $c=\frac{1+3+2+2}{4}=2$; $d=\frac{1+3+2+2+2}{5}=2$. Esses exemplos sugerem que todos os termos, a partir do terceiro, são iguais a 2. De fato, quando introduzimos em uma seqüência um termo igual à média de todos os termos da seqüência, a média da nova seqüência é a mesma que a da seqüência anterior. Assim, o último termo da seqüência dada é **2**.

03. Natasha pulou os números 13, 31, 113, 130,131, 132, ..., 139, num total de 13 números. Portanto, na última página do seu diário escreveu o número 200 + 13 +1 = **214**.

04. Olhando para o último número da fila *n*, vemos que ele é a soma de todos os números de 1 a *n*: por exemplo, na fila 4, o último número da fila é 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Note que para obter a quantidade de números até uma certa fila, basta somar o número da fila ao total de números que havia antes dessa fila. Assim, temos, fila 5 : 15, fila 6: 21, fila 7: 28, fila 8: 36, fila 9: 45, fila 10: 55, fila 11: 66, fila 12: 78, fila 13: 91, fila 14: 105
O número de fitas adesivas horizontais entre uma fila *n* – 1 e uma fila *n* é igual a *n* – 1 e o número de fitas adesivas verticais numa fila *n* é igual *n* – 1. Portanto, até a fila número 14, o número de fitas é $(1+2+\cdots+13)+(1+2+\cdots+13)=2\cdot\frac{13\cdot 14}{2}=$**182**.

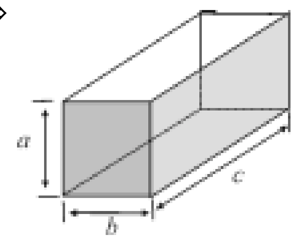
05. Todas as faces azuis: *uma maneira*.
Cinco faces azuis e uma amarela: *uma maneira*.
Quatro faces azuis e duas amarelas: *duas maneiras* (duas faces amarelas opostas ou duas faces amarelas adjacentes).

Três faces azuis e três faces amarelas: *duas maneiras* (três azuis com um vértice comum – *uma maneira* ou três azuis com uma aresta comum duas a duas – *uma maneira*)
Duas faces azuis e quatro amarelas: *duas maneiras*
Uma face azul e cinco amarelas: *uma maneira*.
Todas as faces amarelas: *uma maneira*.
Portanto, o número de maneiras diferentes de pintar o cubo é **10**.

06. Sejam a, b e c as medidas da caixa, conforme indicado no desenho ao lado.
Segundo o enunciado, podemos escrever $ab = 600$, $ac = 1200$ *e* $bc = 800$. Sabemos que o volume da caixa é abc. Utilizando as propriedades das igualdades e de potências, podemos escrever

$$(ab)\cdot(ac)\cdot(bc) = 600\cdot 1200\cdot 800 \Leftrightarrow a^2\cdot b^2\cdot c^2 = 2\cdot 3\cdot 10^2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 10^2\cdot 2^3\cdot 10^2 \Leftrightarrow$$

$$(abc)^2 = 2^6\cdot 3^2\cdot 10^6 \Leftrightarrow abc = \sqrt{2^6\cdot 3^2\cdot 10^6} \Leftrightarrow abc = 2^3\cdot 3\cdot 10^3 = 24\cdot 1000 \text{ cm}^3$$



Como 1 litro é igual a 1000 cm^3, concluímos que o volume da caixa é de **24** litros.

Soluções Nível 1 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

1ª maneira: O quadrado *IJKL* e o quadrado *MNOP* têm como lados as hipotenusas dos triângulos retângulos dados, logo têm a mesma área *s*. Fazendo os dois quadrados coincidirem, concluímos que o dobro da soma *t* das áreas dos quatro triângulos retângulos é a diferença entre as áreas dos quadrados *IJKL* e *EFGH*, ou seja, $2t = 9^2 - 3^2 \Leftrightarrow 2t = 72 \Leftrightarrow t = 36$. Assim, $s = 9 + 36 = 81 - 36 = 45$ cm^2.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO [10 PONTOS]:

i) o aluno apresentou a solução acima ou usou raciocínio equivalente, mesmo que a formalização não tenha sido igual (por exemplo, o aluno desenhou a figura da esquerda dentro da figura da direita, ficando claro que o quadrado externo menos o interno dá 8 triângulos retângulos), chegando à conclusão de que as duas áreas são iguais a 45 cm^2: dar **[10 pontos]**. Caso o aluno não tenha colocado a unidade de área, **[descontar 2 pontos]**.

2ª maneira: No quadrado *IJKL*, seja $JC = x$. Então $IC = ID + DC = JC + DC = x + 3$. Então, no quadrado *EFGH*, temos $HN + NG = x + 3 + x = 9 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Portanto, a área do quadrado *IJKL*, igual à soma das áreas dos quatro triângulos retângulos com a área do quadrado *ABCD*, vale $4\cdot\dfrac{3\cdot(3+3)}{2} + 3^2 = 36 + 9 = 45$ e a área do quadrado *MNOP*, igual à diferença entre a área do quadrado *EFGH* e a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos, vale $9^2 - 4\cdot\dfrac{3\cdot(3+3)}{2} = 81 - 36 = 45$ cm^2.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO [10 PONTOS]:

i) o aluno apresentou a solução acima ou usou raciocínio equivalente, chegando à conclusão de que as duas áreas são iguais a 45 cm^2: 10 pontos. Caso o aluno não tenha colocado a unidade de área, **[descontar 2 pontos]**

ii) o aluno usou o raciocínio acima, mas aplicou Pitágoras para calcular o lado do quadrado, argumentou que a medida é a mesma do outro, e depois, sua área: **[10 pontos]**. Caso o aluno não tenha colocado a unidade de área, **[descontar 2 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Seja n = abc múltiplo de 11; então n – 1 deve ser múltiplo de 9 e n – 2 deve ser múltiplo de 7.

Seja $c \neq 0$**:**

Como abc é múltiplo de 11, podemos ter $a-b+c=0$ ou $a-b+c=11$. Como abc – 1 é múltiplo de 9, podemos ter $a+b+c-1=9$ ou $a+b+c-1=18$. No caso de $a+b+c-1=0$, teríamos $n-1=99 \Leftrightarrow n=100$, que não é múltiplo de 11. Assim, simultaneamente, somente podemos

ter $(i)\left|\begin{array}{l}a+b+c=10\\a+c=b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}2b=10\\a+c=b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}b=5\\a+c=5\end{array}\right.$ ou

$$(ii)\left|\begin{array}{l}a+b+c=19\\a+c=b+11\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}2b+11=19\\a+c=b+11\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}b=4\\a+c=15\end{array}\right.$$

No caso *(i)* existem as seguintes possibilidades para n: 154, 253, 352, 451, que são múltiplos de 11; para n – 1 temos os números 153, 252, 351, 450 e 549 são múltiplos de 9. Para os números n – 2 temos 152, 251, 350, 449 e 548, dos quais apenas 350 é múltiplo de 7.

No caso *(ii)* existem as seguintes possibilidades para n: 649, 748, 847 e 946, que são múltiplos de 11; para n – 1 temos os números 648, 747, 846 e 945 são múltiplos de 9. Para os números n – 2 temos 647, 746, 845 e 944, dos quais nenhum é múltiplo de 7.

Seja c = 0:

Neste caso, n –1 tem os algarismos a, b –1 e 9. Assim, $a+b-1+9=9$ ou $a+b-1+9=18$ ou seja, $a+b=1$ ou $a+b=10$. Como $a-b+c=a-b=0$ ou $a-b+c=a-b=11$, concluímos que a = b. Assim, a = b = 5, o que fornece os números n = 550, n –1 = 549 e n – 2 = 548, que não é divisível por 7.

Portanto, a única seqüência de três números inteiros consecutivos nas condições dadas é 350, 351 e 352.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO [10 PONTOS]:

i) o aluno apresentou alguma resolução usando o raciocínio algébrico acima: dar **[10 pontos]**

ii) o aluno apresentou os números corretamente a partir de tentativas (por exemplo, fez a lista dos múltiplos de 11, subtraiu 1 e viu se era múltiplo de 9, subtraiu novamente 1 e viu se era múltiplo de 7) e explicou que é o único conjunto possível é 350, 351 e 352: 10 pontos; se não explicou que é o único possível, dar **[7 pontos]**

iii) dar **[0 ponto]** para números apresentados que não satisfazem as propriedades exigidas.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

1ª maneira:

a) Podemos representar uma seqüência válida como uma seqüência de pares ordenados. O primeiro exemplo é a seqüência [(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1)] e, a partir dela, podemos criar outras seqüências válidas movendo o par da esquerda para a direita (ou da direita para a esquerda). Assim, são válidas as seqüências [(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,1),(1,1)], [(2,2),(2,3),(3,3),(3,1),(1,1), (1,2)],etc. num total de 6 seqüências diferentes. Mudando a posição dos números dos pares ordenados, podemos criar outras 6 seqüências: [(2,1), (1,1), (1,3), (3,3),(3,2),(2,2)], [(1,1), (1,3), (3,3),(3,2),(2,2), (2,1)], etc. Portanto, de acordo com as regras dadas há 12 modos de colocar as peças em seqüência.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO [5 PONTOS]:

i) se o aluno respondeu 12 e explicou, como foi feito acima ou de forma equivalente (com desenhos, por exemplo) então recebe **[5 pontos]**
ii) se o aluno simplesmente apresentou as seqüências, com números ou desenhos das peças, dar **[0,5 ponto]** para cada seqüência correta além das apresentadas no exemplo
iii) se não explicou nada e só repetiu os exemplos dados, dar **[0 ponto]**.

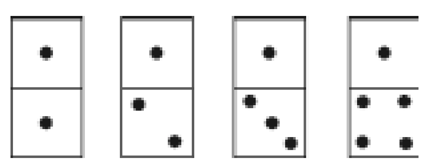
2ª maneira:

a) As pontas devem ter o mesmo número, pois eles aparecem um número par de vezes (se aparecer um número numa ponta e outro na outra, então há pelo menos dois números que aparecem um número ímpar de vezes, o que não ocorre). Alguma peça com dois números iguais deve aparecer em uma das pontas, pois do contrário teríamos três das quatro peças centrais com duas iguais, vizinhas, o que é impossível). Sendo assim, a seqüência pode ser representada por XX-XY-YY-YZ-ZZ-ZX, onde para X temos três possibilidades, para Y temos duas possibilidade e para Z, uma possibilidade, num total de 3.2.1 = 6 possibilidades para a seqüência que começa com uma dupla. Se a seqüência terminar com uma dupla, teremos novamente 6 possibilidades. Portanto, há 12 modos de colocar as seis peças em seqüência.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO [5 PONTOS]:

i) se o aluno respondeu 12 e explicou, como foi feito acima ou de forma equivalente (com desenhos, por exemplo) então recebe **[5 pontos]**
ii) se o aluno simplesmente apresentou as seqüências, com números ou desenhos das peças, dar **[0,5 ponto]** para cada seqüência correta além das apresentadas no exemplo
iii) se não explicou nada e só repetiu os exemplos dados, dar **[0 ponto]**.

b) Para cada número, existem 4 peças. Por exemplo, as peças com o número 1 estão desenhadas ao lado. O número de vezes em que aparece o número 1 é ímpar, logo a seqüência deveria começar com 1 e terminar com outro número ou começar com outro número e terminar com 1. Neste caso, os outros dois números deveriam aparecer um número par de vezes, pois não estariam na ponta, mas isso não ocorre: todos os quatro números aparecem um número ímpar de vezes.



CRITÉRIO DE CORREÇÃO [5 PONTOS]:

i) se o aluno usou a argumentação acima dar **[5 pontos]**.

ii) se o aluno pegou um caso particular, como o apresentado acima e de alguma forma mostrou que não existe seqüência contendo as dez peças, dar **[5 pontos]**

iii) desenhos de peças desconexos, seqüências soltas, diagramas não explicados, etc, recebem **[0 ponto].**