XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Segunda Fase

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte A

CRITÉRIO DE CORREÇÃO: PARTE A

Na parte A serão atribuídos **4 pontos** para cada resposta correta e a pontuação máxima para essa parte será 20. ***NENHUM PONTO*** deverá ser atribuído para respostas que não coincidirem com o gabarito oficial, abaixo:

Problema	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**
Resposta	12	1735	240	2011	2

01 . Primeiro observamos que os ângulos internos de um pentágono regular medem $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 108°$.

Como $AF = AE = AB$, o triângulo ABF é isósceles com

$$m(A\hat{B}F) = m(A\hat{F}B) = \frac{180° - m(B\hat{A}F)}{2} = \frac{180° - m(B\hat{A}E) - m(E\hat{A}F)}{2} = \frac{180° - 108° - 60°}{2} = 6°.$$

No triângulo PEF, $m(E\hat{F}P) = m(A\hat{F}E) - m(A\hat{F}B) = 60° - 6° = 54°$ e

$m(E\hat{P}F) = 180° - m(P\hat{E}F) - m(E\hat{F}P) = 180° - 60° - 12° - 54° = 54°$, ou seja, o triângulo PEF é isósceles com $PE = EF$. Assim, como $EF = AE$, o triângulo PEA também é isósceles com

$$m(P\hat{A}E) = m(E\hat{P}A) = \frac{180° - m(P\hat{E}A)}{2} = \frac{180° - 12°}{2} = 84°.$$

Além disso, $m(C\hat{A}B) = \frac{180° - m(A\hat{B}C)}{2} = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$ e

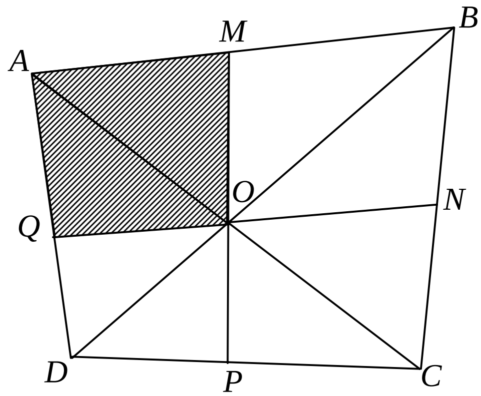
$m(C\hat{A}E) = m(B\hat{A}E) - m(C\hat{A}B) = 108° - 36° = 72°.$

Logo, $m(P\hat{A}C) = m(P\hat{A}E) - m(C\hat{A}E) = 84° - 72° = 12°.$

02. PRIMEIRA SOLUÇÃO: Como $a + 3$ é múltiplo de 11, $a + 3 = 11b$, $b \in \mathbb{Z}$. Sendo a múltiplo de 5, $a - 10b = b - 3$ também é, de modo que $b - 3 = 5c \Leftrightarrow b = 5c + 3 \Leftrightarrow a = 11(5c+3) - 3 = 55c + 30$, $c \in \mathbb{Z}$
O número $a + 2$ é múltiplo de 9, assim como $a + 2 - 54c - 36 = c - 4$. Portanto $c - 4 = 9d \Leftrightarrow c = 9d + 4 \Leftrightarrow a = 55(9d+4) + 30 = 495d + 250$, $d \in \mathbb{Z}$.
Por fim, sendo $a + 1$ múltiplo de 7, então $a + 1 - 497d - 245 = a + 1 - 7(71d + 35) = -2d + 6 = -2(d - 3)$ também é, ou seja, $d - 3 = 7k \Leftrightarrow d = 7k + 3, k \in \mathbb{Z}$ e $a = 495(7k+3) + 250 = 3465t + 1735.$ Logo o menor valor de a é 1735.

SEGUNDA SOLUÇÃO: As condições do problema equivalem a dizer que $2a - 5 = 2(a+1) - 7 = 2(a+2) - 9 = 2(a+3) - 11$ é múltiplo de 5, 7, 9 e 11, donde é múltiplo de $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 3465.$ Assim, o menor valor de a é tal que $2a - 5 = 3465$, ou seja, $a = 1735$.

03. Ligando o ponto de interseção das retas que representam as duas cercas aos vértices, obtemos:



Observemos que, como $AQ = QD$ e as alturas de OAQ e OQD que passam por O são iguais, as áreas de OAQ e OQD são iguais.
Analogamente, as áreas de OAM e OMB; OBN e ONC; OCP e OPD são iguais. Logo área OAQ + área OAM + área OCP + área ONC = área OQD + área OMB + área OPD + área OBN $\Leftrightarrow$ área $AMOQ$ + área $CNOP$ = área $DPOQ$ + área $BMON$ $\Leftrightarrow$ área $AMOQ = 200 + 250 - 210 = 240$.

04. Substituindo y por 2 e x por $a - f(2) = a - 8$, obtemos $f(a - f(2) + f(2)) = a - 8 + f(f(2)) \Leftrightarrow f(a) = a - 8 + f(8)$.
Substituindo a por 2 na última equação, obtemos $f(2) = 2 - 8 + f(8) \Leftrightarrow 8 = 2 - 8 + f(8) \Leftrightarrow f(8) = 14$. Assim $f(a) = a - 8 + 14 = a + 6$ e $f(2005) = 2005 + 6 = 2011$.

05. A idéia da solução é perguntar o valor numérico de $p(k)$ para k suficientemente grande. Suponha que o polinômio seja: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ inteiros positivos. Se k é um inteiro, tal que: $k > M = máx\ \{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0\}$, então $p(k)$ é um inteiro, cujos dígitos na representação em base k são exatamente os coeficientes do polinômio $p(x)$. Podemos então tomar k igual a uma potência de 10 suficientemente grande.
Logo para resolver o problema, basta perguntarmos o valor de $p(1)$, assim obtemos uma cota superior para M, e então perguntamos o valor de $p(x)$ para x igual a uma potência de 10 maior do que $p(1)$. Portanto, o número mínimo de perguntas que devemos fazer, para garantir que o polinômio $p(x)$ seja determinado sem sombra de dúvidas, é 2.
Por exemplo: Se $p(1) = 29$, perguntamos $p(100)$, digamos que $p(100) = 100613$. Então o nosso polinômio é $p(x) = 10x^2 + 6x + 13$.

Soluções Nível 3 – Segunda Fase – Parte B

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Temos $9xy - x^2 - 8y^2 = 2005 \Leftrightarrow xy - x^2 + 8xy - 8y^2 = 2005$

$\Leftrightarrow x(y - x) + 8y(x - y) = 2005 \Leftrightarrow (x - y)(8y - x) = 2005(*)$

Observemos que a fatoração em primos de 2005 é 5 · 401.

Além disso, a soma dos fatores $x - y$ e $8y - x$ é $7y$, que é múltiplo de 7. Devemos então escrever 2005 como produto de dois fatores, cuja soma é um múltiplo de 7. Para isso, os fatores devem ser ± 5 e ± 401. A soma dos fatores é ± 406.

$$(*)\left|\begin{array}{c} x - y = 5 \text{ e } 8y - x = 401 \\ \text{ou} \\ x - y = 401 \text{ e } 8y - x = 5 \\ \text{ou} \\ x - y = -5 \text{ e } 8y - x = -401 \\ \text{ou} \\ x - y = -401 \text{ e } 8y - x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} x = 63 \text{ e } y = 58 \\ \text{ou} \\ x = 459 \text{ e } y = 58 \\ \text{ou} \\ x = -63 \text{ e } y = -58 \\ \text{ou} \\ x = -459 \text{ e } y = -58 \end{array}\right.$$

As soluções são, portanto, (63; 58), (459;58), (–63; –58) e (–459; –58).

OUTRA SOLUÇÃO:

Observando a equação dada como uma equação do segundo grau em x, obtemos

$x^2 - 9yx + 8y^2 + 2005 = 0$ (*),

cujo discriminante é

$\Delta = (9y)^2 - 4(8y^2 + 2005) = 49y^2 - 8020$

Para que (*) admita soluções inteiras, seu discriminante deve ser um quadrado perfeito; portanto

$49y^2 - 8020 = m^2 \Leftrightarrow (7y - m)(7y + m) = 8020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 401$ (**)

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $m \ge 0$, pois se $(m; y)$ é solução de (**), então $(-m; y)$ também é. Observando também que $7y - m$ e $7y + m$ têm a mesma paridade e $7y - m \le 7y + m$, podemos dividir o problema em 4 casos:

- $7y - m = 2$ e $7y + m = 4010 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = 2006/7$, impossível;
- $7y - m = 10$ e $7y + m = 802 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = 58$;
- $7y - m = -802$ e $7y + m = -10 \Leftrightarrow m = 396$ e $y = -58$;
- $7y - m = -4010$ e $7y + m = -2 \Leftrightarrow m = 2004$ e $y = -2006/7$, impossível.

Se $y = 58$, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2} = \frac{9 \cdot 58 + 396}{2} = 459$ e $\frac{9y-m}{2} = \frac{9 \cdot 58 - 396}{2} = 63$.

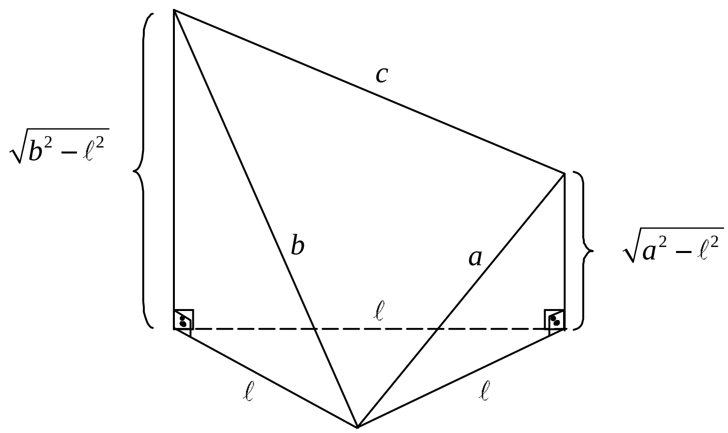
Se $y = -58$, as soluções em x de (*) são $\frac{9y+m}{2} = \frac{9 \cdot (-58) + 396}{2} = -63$

e $\frac{9y-m}{2} = \frac{9 \cdot (-58) - 396}{2} = -459$.

Logo as soluções são (63 ; 58), (459 ; 58), (– 63 ; – 58) e (– 459 ; – 58).

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
Obter a fatoração $(x - y)(8y - x) = 2005$ (como na primeira solução) ou a equação fatorada $(7y - m)(7y + m) = 8020$ (como na segunda solução) ou algo equivalente: **[5 pontos]**
Dividir o problema em até 8 casos: **[2 pontos]**
Cortar casos imediatos, reduzindo o problema a até 4 casos: **[1 ponto]**
Concluir: **[2 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:



Podemos supor, sem perda de generalidade, a configuração acima e, portanto, pelo teorema de Pitágoras:

$$\ell^2 + \left(\sqrt{b^2-\ell^2} - \sqrt{a^2-\ell^2}\right)^2 = c^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\left(b^2-\ell^2\right)\left(a^2-\ell^2\right)} = a^2+b^2-c^2-\ell^2 \Leftrightarrow$$

$$4\left(b^2a^2 - b^2\ell^2 - a^2\ell^2 + \ell^4\right) = \ell^4 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2\ell^2 - 2b^2\ell^2 + 2c^2\ell^2 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$3\ell^4 - 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ell^2 - (a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2) = 0$$

O discriminante da equação do segundo grau acima, em ℓ^2, é

$$\Delta = \left[-2(a^2+b^2+c^2)\right]^2 + 4\cdot 3\cdot\left(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2\right) =$$

$$16(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2).$$

Logo $\ell^2 = \dfrac{2(a^2+b^2+c^2) \pm \sqrt{16(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)}}{2\cdot 3} \Leftrightarrow$

$$\ell^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2) \pm 2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}{3}$$

De fato, observando que ℓ é menor ou igual a min $\{a, b, c\}$, temos $\ell^2 \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$. Portanto

$$\ell = \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2) - 2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}}{3}}.$$

Observação: Outra maneira de obter as equações é trabalhar em R^3, supondo, sem perda de generalidade, que C = (0, 0, 0), $A=(\ell,0,h)$ e $B=\left(\frac{\ell}{2},\frac{\ell\sqrt{3}}{2},z\right)$, com $h,z\geq 0$. Obteríamos, então, as equações

$\ell^2+h^2=a^2, \ell^2+z^2=b^2$ e $\ell^2+(z-h)^2=c^2$, que nos leva à mesma equação da solução acima.

Curiosidade: Para o triângulo 3, 4, 5 a medida do lado da projeção que é um triângulo equilátero é aproximadamente e. O erro é de apenas 0,1%.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Obteve qualquer equação ou sistema de equações equivalente a (*): **[3 pontos]**
- Obteve uma equação do 2º grau em l^2: **[2 pontos]**
- Resolveu tal equação, ou seja, calculou suas duas raízes: **[2 pontos]**
- Mostrou que só uma das raízes é adequada, determinando l: **[3 pontos]**

Obs.: Como essa questão reduz-se rapidamente à manipulação algébrica, os passos posteriores a um erro de conta não devem ser considerados para pontuação. Por exemplo, um estudante que chegue na equação em l^2, mas erre a sua resolução, deve obter no máximo 5 pontos.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Primeira Solução:

Seja a_n o número de ordenadas de resultados (sem derrotas), cujo total de pontos seja n. A pergunta do problema é: quanto vale a_{20}?

Para responder a tal pergunta, iremos determinar uma relação recursiva entre os termos dessa seqüência. Pensando no último resultado de uma ordenada de resultados totalizando n pontos, ele pode ser E ou V. Se for E, então retirando o último termo da ordenada, ela passa a totalizar $n-1$ pontos. Se for V, então ao retiramos o último resultado, a ordenada passa a totalizar $n-3$ pontos. Disto, concluímos que:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$.

Calculando os valores da seqüência, temos: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 4$, $a_6 = 6$, $a_7 = 9$, $a_8 = 13$, $a_9 = 19$, $a_{10} = 28$, $a_{11} = 41$, $a_{12} = 60$, $a_{13} = 88$, $a_{14} = 129$, $a_{15} = 189$, $a_{16} = 277$, $a_{17} = 406$, $a_{18} = 595$, $a_{19} = 872$ e $a_{20} = 1278$.

Logo existem 1278 possíveis seqüências ordenadas de resultados que o Flameiras pode ter obtido.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

1) Conseguiu determinar a equação recursiva: $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$; **[7 pontos]**
2) Calculou o valor correto de a_{20}; **[3 pontos]**

Segunda Solução:

Sejam x e y o número de vitórias e empates do Flameiras, respectivamente. Temos que: $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $3x + y = 20$. Dividindo em 7 possíveis casos:

1º caso: $x = 0$ e $y = 20$: Temos exatamente uma seqüência ordenada de resultados.

2º caso: $x = 1$ e $y = 17$: Uma seqüência ordenada deverá conter exatamente um "V" e 17 "E", portanto o número de seqüências ordenadas é exatamente o número de anagramas da palavra:

"VEEEEEEEEEEEEEEEEE", que é: $(17 + 1)! / (17! \cdot 1!) = 18$.
3º caso: $x = 2$ e $y = 14$: Analogamente ao 2º caso, o número de seqüências ordenadas é igual ao número de anagramas da palavra "VVEEEEEEEEEEEEEE", que é: $(14 + 2)! / (14! \cdot 2!) = 120$.
4º caso: $x = 3$ e $y = 11$: $(11 + 3)! / (11! \cdot 3!) = 364$ seqüências ordenadas.
5º caso: $x = 4$ e $y = 8$: $(8 + 4)! / (8! \cdot 4!) = 495$ seqüências ordenadas.
6º caso: $x = 5$ e $y = 5$: $(5 + 5)! / (5! \cdot 5!) = 252$ seqüências ordenadas.
7º caso: $x = 6$ e $y = 2$: $(2 + 6)! / (2! \cdot 6!) = 28$ seqüências ordenadas.
Temos um total de $1 + 18 + 120 + 364 + 495 + 252 + 28 = 1278$ seqüências ordenadas de resultados possíveis.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:
1) Considerou a equação $3x + y = 20$; **[2 pontos]**
2) Dividiu o problema nos 7 casos; **[2 pontos]**
3) Para cada caso, percebeu que o número de ordenadas é $(x + y)! / (x! \cdot y!)$, que corresponde aos anagramas da palavra V...VE...E com x V's e y E's; **[4 pontos]**
4) Conclusão. **[2 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:
Seja p, $p + d$, $p + 2d$, $p + 3d$, $p + 4d$, $p + 5d$, $p + 6d$ a progressão aritmética, que podemos supor crescente sem perda de generalidade. Então:
1) $p \neq 2$.
De fato, se $p = 2$, $p + 2d$ é par e maior do que 2 e, portanto, não é primo.

2) d é múltiplo de 2.
Caso contrário, como p é ímpar, $p + d$ seria par e maior do que 2.

3) $p \neq 3$
Senão, teríamos $p + 3d$ múltiplo de 3, maior do que 3.

4) d é múltiplo de 3
Caso contrário, $p + d$ ou $p + 2d$ seria múltiplo de 3 e maior do que 3.

5) $p \neq 5$
Senão teríamos $p + 5d$ múltiplo de 5, maior do que 5.

6) d é múltiplo de 5.
Caso contrário, $p + d$, $p + 2d$, $p + 3d$ ou $p + 4d$ seria múltiplo de 5, maior do que 5.
De 1), 2), 3), 4), 5) e 6), $p \geq 7$ e d é múltiplo de 30.
Se $p = 7$, observando que $187 = 11 \cdot 17$, então $d \geq 120$.
Para $d = 120$, a seqüência é 7, 127, 247, 367, 487, 607, 727 a qual não serve, pois $247 = 13 \cdot 19$.
Para $d = 150$, a seqüência é 7, 157, 307, 457, 607, 757, 907 e satisfaz as condições do problema.
Finalmente, se $p \neq 7$, então d é múltiplo de 210 e o menor último termo possível para tais seqüências é $11 + 6 \cdot 210 = 1271$.
Portanto a resposta é 907.

CRITÉRIO DE CORREÇÃO:

- Percebeu os fatos 1 e 2: **[1 ponto]**
- Percebeu os fatos 3, 4, 5 e 6: **[4 pontos (1 por fato)]**
- Eliminou os casos em que $p = 7$ e $d = 60$, $p = 7$ e $d = 90$ (existe termo composto): **[1 ponto]**
- Eliminou o caso em que $p = 7$ e $d = 120$ (existe termo composto): **[1 ponto]**
- Observou que $p = 7$ e $d = 150$ determinam uma PA de 7 primos: **[1 ponto]**
- Eliminou os casos em que p é maior ou igual a 11(o sétimo termo é maior ou igual a 1271): **[2 pontos]**

A pontuação a seguir não se acumula com as demais.

- Obter, com verificação, uma PA formada por 7 primos: **[6 pontos]**