XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Primeira Fase

Soluções Nível Universitário

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Pelo enunciado, temos
$f(x) = (x-1)(x+1)(x-c) = x^3 - cx^2 - x + c$, $f'(x) = 3x^2 - 2cx - 1$, donde $f'(-1) = 2(1+c)$ e $f'(1) = 2(1-c)$.

Assim, as equações das retas AC e BC são, respectivamente,
$y = 2(1+c)(x+1)$ e $y = 2(1-c)(x-1)$.

[2 pontos até aqui]

Igualando para obter as coordenadas de C, temos
$(1+c)(x+1) = (1-c)(x-1)$
$x = -1/c$
$y = 2(c+1)(c-1)/c$

Assim a área pedida é $S = |2(c+1)(c-1)/c|$, pois o triângulo ABC tem base $AB = 2$ e altura $|y| = |2(c+1)(c-1)/c|$.

[+3 pontos até aqui]

Como c e a área S são inteiros, temos $c \mid 2(c+1)(c-1)$.
Mas $(c+1)$ e $(c-1)$ são primos com c, donde $c \mid 2$.
Assim $c = \pm 1$ ou $c = \pm 2$.
Os casos $c = \pm 1$ dão $S = 0$, um triângulo degenerado.
Os casos $c = \pm 2$ dão $S = 3$.
O valor da área é, portanto, igual a 3.
[+5 pontos, solução completa]

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Temos $\ln(1+tgx) = \ln\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}\right)$.

Entretanto, $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} x \cos\dfrac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$, e logo

$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. **[3 pontos]**

Assim, $\ln(1+tgx) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}\right) = \dfrac{\ln 2}{2} + \ln\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \ln\cos x$, donde

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+tgx)\,dx = \frac{\pi\cdot\ln 2}{8} + \int_0^{\pi/4} \ln\ \mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx - \int_0^{\pi/4} \ln\ \cos x\ dx.$$ **[+ 3 pontos]**

Agora, $\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, donde

$\int_0^{\pi/4} \ln\ \mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\pi/4} \ln\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx = \int_0^{\pi/4} \ln\ \cos y\ dy$ (fazendo a substituição $y = \frac{\pi}{4} - x$),

donde $\int_0^{\pi/4} \ln(1+tgx)\,dx = \frac{\pi\cdot\ln 2}{8}$. **[+ 4 pontos]**

SOLUÇÃO ALTERNATIVA DO PROBLEMA 2:

Seja $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgx)dx$; faça $u = \frac{\pi}{4} - x,\ du = -dx$. **[2 pontos]** .

Então $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+tg\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-tgu}{1+tgu}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+tgu}\right)du$ **[+3 pontos]** .

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgu)du = \frac{\pi\cdot\ln 2}{4} - I \Rightarrow 2I = \frac{\pi\cdot\ln 2}{4} \Rightarrow I = \frac{\pi\cdot\ln 2}{8}$. **[+5 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

LEMA: O tetraedro de maior volume inscrito na esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é o tetraedro regular. Seus vértices podem ser tomados como $(\pm c,\ \pm c, \pm c)$ com um número par de sinais – onde $c = \sqrt{3}/3$. Sua aresta é $a = 2\sqrt{6}/3$ e seu volume é $V = 8\sqrt{3}/27$.

O elipsóide do problema é obtido a partir da esfera unitária aplicando a transformação linear $T = diag(3,4,5) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Tetraedros inscritos na esfera são levados em tetraedros inscritos no elipsóide multiplicando o volume por |det (T)| = 60. Assim um tetraedro de volume máximo é $(\pm 3c, \pm 4c, \pm 5c)$, com um número par de sinais –, de volume $160\sqrt{3}/9$.

Demonstração do LEMA:

A única parte não trivial é a de provar que um tetraedro de volume máximo deve ser regular. Vamos provar que todas as faces de um tetraedro de volume máximo são triângulos equiláteros. Para isso vamos fixar o vértice V_0 e variar os vértices V_1, V_2, V_3 restritos ao círculo definido por estes pontos. Ora, com este tipo de mudança a altura do tetraedro não muda, donde maximizamos o volume maximizando a área do triângulo V_1, V_2, V_3. É um fato sabido e de fácil demonstração que o triângulo de área máxima inscrito em um círculo dado é o equilátero.

Solução usando o lema mas sem a demonstração do lema: **[8 pontos]**
Solução completa, incluindo a demonstração do lema: **[10 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Temos, de $A^2+B^2=(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$ que $AB + BA = 0$.

Agora, $A^3+B^3=(A+B)^3=(A+B)(A+B)^2=(A+B)(A^2+B^2)=A^3+AB^2+BA^2+B^3$, donde $AB^2+BA^2=0$. Como $BA=-AB$, $0=AB^2+BA^2=AB^2-ABA=A(B^2-BA)$ e, como A é invertível, $B^2-BA=0$. **[+ 2 pontos]**

Temos, também $A^3+B^3=(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=(A^2+B^2)(A+B)=A^3+A^2B+B^2A+B^3$, donde $A^2B+B^2A=0$. Como $B^2=BA$, segue que $A^2B+BA^2=0$, e, como $BA=-AB$, obtemos $0=A^2B+BA^2=A^2B-ABA=A(AB-BA)$, donde $AB = BA$, pois A é invertível. **[+ 4 pontos]**

Finalmente, de $AB + BA = 0$, segue que $2AB=0$, donde, como A é invertível, devemos ter $B = 0$. **[+ 3 pontos]**

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Sabemos que para todo natural k existe um polinômio $P_k(t)=c_{k,k}t^k+\ldots+c_{k,1}t+c_{k,0}$ de grau k tal que $\cos(ka)=P_k(\cos a)$ para todo a.

Por exemplo, $P_0=1, P_1=t, P_2=2t^2-1$

Temos portanto

$$a_{ij}=P_{i-1}(\cos(j\alpha))=\sum_{0\le k<i} c_{i-1,k}(\cos(j\alpha))^k$$

Podemos agora, para i > 1, subtrair $c_{i-1,0}$ vezes a primeira linha da i-ésima linha sem alterar o determinante obtendo assim que, para $i > 1$, $\tilde{a}_{ij}=\sum_{0<k<i} c_{i-1,k}\cdot(\cos(j\alpha))^k$.

Para $i > 2$, subtraímos $c_{i-1,1}$ vezes a segunda linha da i-ésima linha, ainda sem alterar o determinante.

Repetindo o processo, vemos que det(A) = det(B) onde $b_{ij}=c_{i-1,i-1}(\cos(j\alpha))^{i-1}$ Assim, a menos dos fatores $c_{i-1,i-1}$, B é uma matriz de Vandermonde, e seu determinante é igual a

$$\prod_{i\le n} c_{i-1,i-1}\cdot\prod_{j_0<j_1}(\cos(j_1\cdot\alpha)-(\cos(j_0\cdot\alpha))=(-2)^{n(n-1)/2}\cdot\prod_{i\le n} c_{i-1,i-1}\cdot\prod_{1<j}\left(sen\left(\frac{(j_1+j_0)\alpha}{2}\right)\right)\cdot\left(sen\left(\frac{(j_1-j_0)\alpha}{2}\right)\right).$$

Assim det(A) = 0 se e somente se existem $1\le j_0<j_1\le n$ tais que $sen\left(\frac{(j_1+j_0)\alpha}{2}\right)=0$ ou $sen\left(\frac{(j_1-j_0)\alpha}{2}\right)$.

Mas isto ocorre se e somente se $(j_1\pm j_0)\alpha=2k\pi$, k inteiro.

Ou seja, det(A) = 0 se e somente se $\alpha=2k\pi/(j_1\pm j_0)$ para alguma escolha de $1\le j_0<j_1\le n$

Falta verificar quais os valores possíveis de $j_1\pm j_0$.

Para $n\le 1$ o problema é trivial (det(A) = 1), donde não há nenhum α com essa propriedade.

Para $n = 2$, os únicos valores possíveis de $j_1\pm j_0$ são 1 e 3,

donde α deve ser da forma $\frac{2k\pi}{3}$, com k inteiro

Para $n > 2$, $j_1 \pm j_0$ assume todos os valores inteiros positivos m até $2n-1$, donde α deve ser da forma $2k\pi/m$, com $m \le 2n-1$ e k inteiro.

Observação [Não vale pontos extras]:

Temos ainda $c_{k,k} = 2^{k-1}$ para $k > 1$
donde $\prod_{i \le n} c_{i-1,i-1} = 2^{(n-1)(n-2)/2}$ e
$\det(A) = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot 2^{(n-1)^2}$.
$$\prod_{j_1 < j_0} \left(sen\left(\frac{(j_1 + j_0)\alpha}{2} \right) \cdot sen\left(\frac{(j_1 - j_0)\alpha}{2} \right) \right).$$

Demonstração da afirmação $\cos(ka) = P_k(\cos(a))$ [Não vale pontos extras]:
Temos $\cos((k+1)a) + \cos((k-1)a) = 2\cos(ka) \cdot \cos a$, donde, assumindo que o resultado vale para $k-1$ e para k, $\cos((k+1)a) = 2\cos a \cdot P_k(\cos a) - P_{k-1}(\cos a)$, o que prova o resultado fazendo $P_{k+1}(x) = 2xP_k(x) - P_{k-1}(x)$, para $k \ge 1$, com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$. Note que, sabendo que o coeficiente líder $c_{k,k}$ de $P_k(x)$ é 2^{k-1}, segue imediatamente que o coeficiente líder $c_{k+1,k+1}$ de $P_{k+1}(x)$ é $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k = 2^{(k+1)-1}$.

Conjecturar a resposta sem demonstrar: **[1 ponto]**.

Solução correta para $n > 2$, ignorou o caso $n = 2$: **[9 pontos]**.

Fazer apenas os casos $n \le 2$: **[1 ponto]**.

Fazer apenas os casos $n \le 3$: **[2 pontos]**.

06 . Vamos estimar inicialmente a quantidade de tipos de números de 2005 algarismos a menos de uma permutação de seus algarismos. Um tal tipo de números está determinado pelas quantidades $x_0, x_1, \ldots, x_9$ de algarismos iguais a 0, 1, …, 9, respectivamente; devemos ter $x_0 + x_1 + \ldots + x_9 = 2005$.
Assim, a quantidade desses tipos de números é, no máximo, o número de soluções de $x_0 + x_1 + \ldots + x_9 = 2005$, com $x_i \ge 0$ para $0 \le i \le 9$, que é
$\binom{2005+9}{9} = \binom{2014}{9} < 2014^9 < (10^4)^9 = 10^{36}$. **[3 pontos]**
Por outro lado n^{27} tem 2005 algarismos se, e somente se, $10^{2004} \le n^{27} < 10^{2005} \Leftrightarrow 10^{\frac{2004}{27}} \le n < 10^{\frac{2005}{27}}$, donde há pelo menos $10^{\frac{2005}{27}} - 10^{\frac{2004}{27}}$ naturais n tais que n^{27} tem 2005 algarismos. Entretanto,

$$10^{\frac{2005}{27}}-10^{\frac{2004}{27}}=10^{\frac{2004}{27}}\left(10^{\frac{1}{27}}-1\right)=10^{\frac{2004}{27}}\left(e^{\frac{\ln 10}{27}}-1\right)>10^{\frac{2004}{27}}\cdot\frac{\ln 10}{27}>10^{74}\cdot\frac{\ln 10}{27}>10^{72}\geq 2005\cdot 10^{36},$$

donde, pelo princípio da casa dos pombos, há pelo menos 2005 naturais n tais que n^{27} tem 2005 algarismos e esses números n^{27} são todos do mesmo tipo (seus algarismos são os mesmos a menos de uma permutação). **[+7 pontos]**

Nota: É possível estimar $10^{\frac{1}{27}}-1$ sem usar a desigualdade $e^x-1\geq x.$ Por exemplo:

$10^{\frac{1}{27}}>10^{\frac{1}{32}}=\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{16}}>3^{\frac{1}{16}}>(1,7)^{\frac{1}{8}}>(1,3)^{\frac{1}{4}}>(1,12)^{\frac{1}{2}}>1,05,$ donde $10^{\frac{1}{27}}-1>0,05>\dfrac{1}{100}$ (que foi o que usamos).