XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. séries)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

1) D	6) B	11) D	16) C	21) Anulada
2) B	7) B	12) A	17) D	22) Anulada
3) E	8) D	13) B	18) Anulada	23) C
4) E	9) A	14) B	19) C	24) B
5) D	10) B	15) B	20) C	25) B

- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 2 = 25 pontos).**
- **Deve ser atribuído 1 ponto para todos os alunos nas questões anuladas.**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site www.obm.org.br**

1. **(D)** Pela promoção, quem levar 2 unidades paga pelo preço de 1,5 unidade, logo quem levar 4 unidades paga pelo preço de 3 unidades, ou seja, leva quatro e paga três.

2. **(B)** A transparência é igual a $0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}63$. Logo, a redução da radiação é $1 – 0{,}63 = 0{,}37 = 37\%$.

3. **(E)** A partir da figura, vemos que o comprimento *a* dos retângulos menores é o dobro da sua largura *b*. Temos então que $a+b=b+2b=3b=21$, ou seja, $b=7$ cm e $a=14$ cm. Portanto, o comprimento do retângulo maior é $4b=28$ e a sua área é $21\times 28=588\text{ cm}^2$.

4. **(E)** Arnaldo: 1 bilhão = $1\,000\,000\times 1\,000\,000=1\,000\,000\,000\,000$. Professor Piraldo: 1 bilhão = $1\,000\times 1\,000\,000=1\,000\,000\,000$.
A diferença é: $1\,000\,000\,000\,000-1\,000\,000\,000=999\,000\,000\,000$

5. **(D)** Em 600 números inteiros consecutivos positivos, há $\frac{600}{3}=200$ múltiplos de 3 e $\frac{600}{4}=150$ múltiplos de 4; entretanto, alguns desses números aparecem duas vezes nessa contagem, pois são múltiplos dos dois números, ou seja, são múltiplos de 12. Como há $\frac{600}{12}=50$ desses múltiplos, concluímos que o número de páginas com defeito é $200+150-50=300$.

6. **(B)** O volume de platina produzido na história é

$$50\text{ anos}\cdot\frac{110\text{ toneladas}}{1\text{ ano}}\cdot\frac{1000000\text{ g}}{1\text{ tonelada}}\cdot\frac{1\,cm^3}{21{,}45\,g}\cdot\frac{1\,m^3}{1000000\,cm^3}\cong 256\,m^3,$$

volume próximo ao de uma piscina (por exemplo, de 1,6 m de profundidade, 16 metros de largura e 10 metros de comprimento).

7. **(B)** Seja x o primeiro termo. Como o segundo termo é 1, o terceiro termo é $x+1$, o quarto é $1+(x+1)=x+2$.

Como o quinto termo é 2005, $(x+1)+(x+2)=2x+3=2005 \Leftrightarrow 2x=2002 \Leftrightarrow x=1001$.

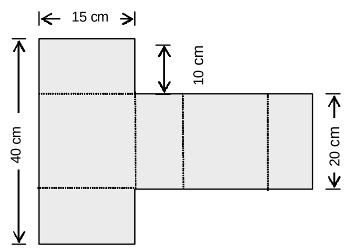
Logo o sexto termo é $(x+2)+(2x+3)=3x+5=3\cdot 1001+5=3008$.

8. **(D)** Na primeira balança temos 3 triângulos + 1 círculo = 6 quadrados. Na segunda, vemos 2 triângulos + 4 círculos = 8 quadrados, ou seja, 1 triângulo + 2 círculos = 4 quadrados. Logo, 4 triângulos + 3 círculos = (3 triângulos + 1 círculo) + (1 triângulo + 2 círculos) = 6 quadrados + 4 quadrados = 10 quadrados.

9. **(A)** Sejam x e $13 - x$ a quantidade de números negativos e positivos, respectivamente. Assim, há $x(13 - x)$ pares de números com produto negativo.

Logo $x(13-x)=22 \Leftrightarrow x^2-13x+22=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=11$. Como há mais positivos que negativos, há 2 números negativos.

10. **(B)** A caixa terá dimensões 20 cm $\times$ 15 cm $\times$ 10 cm. Logo, seu volume será igual a $20 \times 15 \times 10 = 3000$ cm^{2}.



11. **(D)** Temos

$$a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c) \Leftrightarrow a+bc=a^2+ab+ac+bc$$
$$\Leftrightarrow a(a+b+c-1)=0 \Leftrightarrow a=0 \; ou \; a+b+c=1$$

Tomando a = 1 e b = c = 0 vemos que as demais alternativas estão incorretas.

12. **(A)** Se P é a fração de Paulistas, entre os Paulistas e Baianos, temos 0,9P + 0,1(1- P) = 0,2. Logo, 0,8 P = 0,1, ou seja, P = 0,125 = 12,5%.

13. **(B)** Como ABC e DEF são triângulos eqüiláteros, seus ângulos internos medem 60°.

No triângulo AGD,

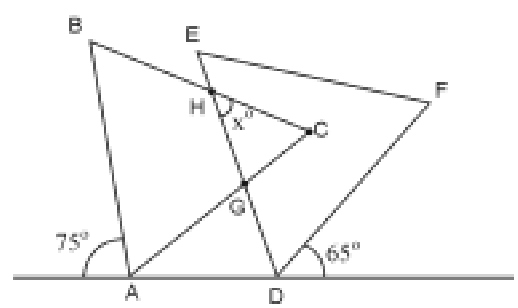
$m(G\hat{A}D)=180^{O}-75^{O}-60^{O}=45^{O}$ e

$m(G\hat{D}A)=180^{O}-65^{O}-60^{O}=55^{O}$

Portanto,

$m(A\hat{G}D)=180^{O}-45^{O}-55^{O}=80^{O}$ e no triângulo CGH,

$x+80^{O}+60^{O}=180^{O} \Leftrightarrow x=40^{O}$.



14. (B) Sabendo que $O \times B \times M = 240 \Leftrightarrow O \times B = \dfrac{240}{M} \Leftrightarrow B \times M = \dfrac{240}{O}$,

$$O \times B + M = 46 \Leftrightarrow \frac{240}{M} + M = 46 \Leftrightarrow M^2 - 46M + 240 = 0 \Leftrightarrow M = 6 \text{ ou } M = 40 \text{ e}$$

$$O + B \times M = 64 \Leftrightarrow O + \frac{240}{O} = 64 \Leftrightarrow O^2 - 64O + 240 = 0 \Leftrightarrow O = 4 \text{ ou } O = 60.$$

Sendo *O*, *B* e *M* inteiros, a única possibilidade é *O* = 4, *M* = 6 e *B* = $\dfrac{240}{4 \times 6} = 10$.

Assim, *O* + *B* + *M* = 4 + 10 + 6 = 20.

15. (B) Para fazer uma peça, são necessários $3 \times 10 + 3 \times 5 = 45$ centímetros de arame. Como 20 metros = 2 000 centímetros e 2000 dividido por 45 dá quociente 44 e resto 20, temos que o serralheiro irá fazer 44 peças completas, ficando com uma sobra de 20 centímetros, que lhe possibilitarão fazer as duas primeiras partes de uma peça, na forma  .

16. (C) Como 365 dividido por 7 dá quociente 52 e resto 1 e 366 dividido por 7 dá o mesmo quociente e resto 2, em um ano, bissexto ou não, há no máximo 53 domingos. Um mês tem entre $28 = 4 \cdot 7$ e $31 = 4 \cdot 7 + 3$ dias, então todo mês tem 4 ou 5 domingos. Como 53 dividido por 12 dá quociente 4 e resto 5, há no máximo 5 meses com 5 domingos.
Um exemplo de ano com cinco meses com cinco domingos é um iniciado no domingo.

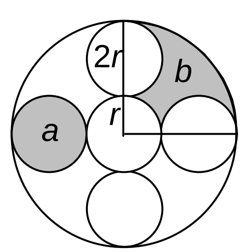
17. (D) Os números em questão são 12, 23, 34, 45, …, 89 (8 números), 123, 234, 345, …, 789 (7 números), 1234, 2345, …, 6789 (6 números) e, por fim, 12345, um total de 8 + 7 + 6 + 1 = 22 números.

18. Alternativa Anulada

Solução:

O tempo de percurso é minimizado quando se trafega o maior trecho a velocidades maiores e o menor trecho a velocidades menores e maximizado quando se trafega o maior trecho a velocidades menores e o menor trecho a velocidades maiores. Assim, o tempo total gasto pelo piloto nos três trechos é no mínimo $\dfrac{240}{40} + \dfrac{300}{75} + \dfrac{400}{80} = 15$ horas e no máximo $\dfrac{240}{80} + \dfrac{300}{75} + \dfrac{400}{40} = 17$ horas. Assim, as respostas C) e D) estão corretas.

19. (C)



A área a é igual à área de um círculo de raio *r*, ou seja, $a = \pi r^2$. A área *b* é igual á área de um quarto de círculo de raio 3*r* subtraída de duas vezes a área de um semicírculo de raio *r* e da área de um quarto de círculo de raio r. Logo $b = \frac{1}{4} \cdot \pi(3r)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \pi r^2$.

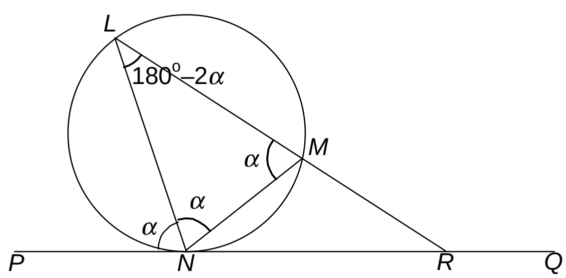
Portanto $\frac{a}{b} = \frac{\pi r^2}{\pi r^2} = 1$.

20. (C) Suponha que haja alunos de 4 ou mais nacionalidades entre os 9 alunos da classe. Se escolhermos um aluno de cada nacionalidade não haverá dois alunos de mesma nacionalidade, o que é um absurdo. Logo há alunos de no máximo 3 nacionalidades.
Da mesma forma, entre os 9 alunos não há 4 de mesma nacionalidade, pois se houvesse poderíamos formar um grupo de 5 alunos com mais de 3 alunos de mesma nacionalidade. Logo há no máximo 3 alunos de cada nacionalidade.
Como há 9 alunos, no máximo 3 nacionalidades e no máximo 3 alunos por nacionalidade, há exatamente 3 nacionalidades e 3 alunos de cada nacionalidade. Em particular, há 3 alunos brasileiros.

21. **Alternativa Anulada**

Solução:
Vamos calcular o número de plins no intervalo (12h, 0h], e descontar os plins que ocorreram no último segundo depois.
Seja w a velocidade angular do ponteiro das horas. Então as velocidades angulares dos ponteiros dos minutos e dos segundos são $12w$ e $720w$. Vamos contar o número de plins entre cada par de ponteiros: Minutos/Horas: Do referencial do ponteiro das horas, ele está parado e o ponteiro dos minutos roda com velocidade angular $11w$ [*]. Como os dois começam juntos, e um ponteiro rodando a w completa uma volta no período, o ponteiro dos minutos completa 11 voltas nas 12 horas do problema. Logo há 11 plins gerados por encontros deste tipo.
Segundos/Horas: A velocidade relativa é $720w - w = 719w$, logo há 719 plins.
Segundos/Minutos: A velocidade relativa é $720w - 12w = 708w$, logo há 708 plins.
Logo, no total, há 11 + 719 + 708 = 1438 plins.
Descontando os três plins ocorridos às 0h, há, no total, 1435 plins no período de 12h1s a 23h59m59s.

22. **Alternativa Anulada**
Solução: (Esmeralda confundiu-se, digitando $\alpha < 60°$ onde deveria ser $\alpha > 60°$.)



Como a reta PQ é tangente à circunferência, os ângulos LNP e LMN são congruentes, ou seja, $m(LMN) = \alpha$. Sendo o triângulo LMN isósceles com $LM = LN$, os ângulos LNM e LMN são congruentes, e, portanto, $m(MLN) = 180^{o} - m(LNM) - m(LMN) = 180^{o} - 2\alpha$.
O ângulo LNP é externo do triângulo LNR, logo $m(LNP) = m(NLR) + m(LRN)$, ou seja, $\alpha = 180^{o} - 2\alpha + m(LRP) \Leftrightarrow m(LRP) = 3\alpha - 180^{o}$.

23. (C) Como $\sqrt{x+\frac{1}{2}\sqrt{y}} > \sqrt{x-\frac{1}{2}\sqrt{y}}$ e x é inteiro positivo,

$$\sqrt{x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}-\sqrt{x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}-\sqrt{x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}-2\sqrt{x+\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}\sqrt{x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}}+x-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}=1$$

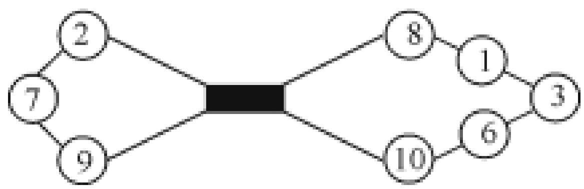
$$\Leftrightarrow 2x-1=2\sqrt{x^2-\tfrac{1}{4}y}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=4x^2-y$$

$$\Leftrightarrow y=4x-1$$

A única alternativa que contém um número da forma $4x-1$ é a alternativa C.

24. (B) Nas condições dadas, a distribuição dos números pelos círculos é a representada a seguir. A soma dos números escritos é 46.



25. (B) Note que giramos o bloco 5 vezes. Indicaremos os quadradinhos em contato com o bloco após o i-ésimo giro com o número i. Os quadradinhos em contato com o bloco na sua posição inicial estão indicados com o número zero.

			0				
	4	**4**	**0/4**	**3**	**3**		
	5	**5**	**1/5**	**2**	**2**		
	5	**5**	**1/5**	**2**	**2**		
			1	**2**	**2**		

Contando, observamos que o bloco esteve em contato com 19 quadradinhos do tabuleiro.