XXVIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)

GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) C	6) B	11) C	16) D	21) D
2) C	7) B	12) D	17) A	22) D
3) C	8) B	13) A	18) D	23) D
4) A	9) B	14) C	19) D	24) E
5) E	10) A	15) D	20) A	25) B

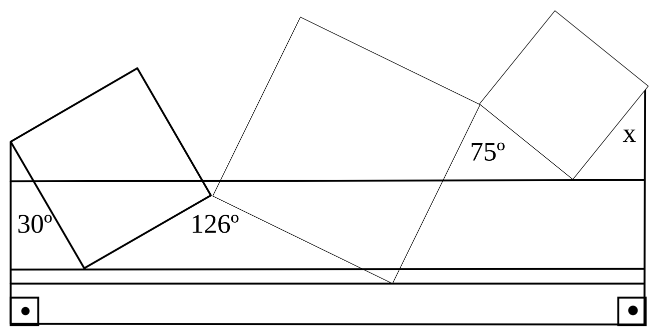
- **Cada questão da Primeira Fase vale 1 ponto. (Total de pontos no Nível 3 = 25 pontos).**
- **Aguarde a publicação da Nota de Corte de promoção à Segunda Fase no site www.obm.org.br**

1) (C) Seja x a idade de Neto em 1994. Então a idade de sua avó no mesmo ano era $2x$. Os anos de nascimento dos dois são $1994 - x$ e $1994 - 2x$, respectivamente. Logo $1994 - x + 1994 - 2x = 3844$, ou seja, $x = 48$. Neto completa $48 + 2006 - 1994 = 60$ anos em 2006.

2) (C) Como $2a+1=a+(a+1)$, tomando a de 1 a 2005 obtemos todos os números ímpares de $1+2=3$ a $2005+2006=4011$. Como $2a=(a-1)+(a+1)$, tomando a de 2 a 2005 obtemos todos os números pares de $1+3=4$ a $2004+2006=4010$. Logo obtemos todos os números de 3 a 4011, isto é, $4011 - 3 + 1 = 4009$ ao todo.

3) (C) Dado que, após n dias, há uma ameba amarela e n amebas vermelhas, a probabilidade de uma ameba vermelha se duplicar é $\frac{n}{n+1}$. Logo a probabilidade de que a colônia tenha, após 2006 dias, exatamente uma ameba amarela é $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2006}{2007}=\frac{1}{2007}$.

4) (A) Trace retas horizontais pelos vértices mais baixos dos três quadrados:



Então os ângulos à esquerda e à direita do vértice do quadrado da esquerda são 60º e 30º, respectivamente; os ângulos à esquerda e à direita do vértice do quadrado do meio são respectivamente 180º – 126º – 30º = 24º e 90º – 24º = 66º; os ângulos à esquerda e à direita do vértice do quadrado da direita são respectivamente 180º – 75º – 66º = 39º e 90º – 39º = 51º. Enfim, no triângulo retângulo com um dos ângulos igual a x, temos x = 90º – 51º = 39º.

5) (E) Temos $ab = a - b \Leftrightarrow b = \dfrac{a}{1+a}$. Logo

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab=\frac{a}{\frac{a}{1+a}}+\frac{\frac{a}{1+a}}{a}-a\cdot\frac{a}{1+a}=1+a+\frac{1-a^2}{1+a}=1+a+\frac{(1-a)(1+a)}{1+a}=1+a+1-a=2$$

Ou seja, o *único* possível valor de $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-ab$ é 2.

6) (B) Note que basta que o algarismo das dezenas do primeiro membro seja maior do que o algarismo das dezenas do segundo membro, que por sua vez, seja maior que o algarismo das dezenas do terceiro membro. Há $\dbinom{6}{3}$ maneiras de escolhermos três algarismos para serem os algarismos mais à esquerda dos três membros; o maior vai para o primeiro membro, o do meio para o segundo membro e o menor, para o terceiro membro. Feito isso, permutamos os outros três algarismos entre as unidades, obtendo 3! possibilidades. Assim, podemos preencher a dupla desigualdade de $\dbinom{6}{3}\cdot 3!$ = $\dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}\cdot 3!$ = 120 maneiras.

7) (B) O número 24 = $2^3 3$ tem somente dois divisores cubos perfeitos: 1 e 8. Assim, se é possível representar 24 na forma a^2b^3, então b = 1 ou b = 2 e, portanto, a^2 = 24 ou a^2 = 3, o que é impossível. Além disso, na alternativa a podemos tomar a = 3 e b = 2; na alternativa c, podemos tomar a = 24 e b = c = 1; na alternativa *d*, podemos tomar a = 3, b = 1 e c = 2; e na alternativa e, podemos tomar a = 2, b = 3 e c = 1.

8) (B) Observe que $2x^2+2x+19=2x(x+1)+19$.
É fácil verificar que para x = 1, 5 e 9 os números obtidos são primos. Para x = 37, $2\cdot 37\cdot 38+19=19\cdot 149$, um número composto. Pode-se verificar também que o valor obtido para x = 50, 5119 é um número primo.

9) (B) Pela desigualdade triangular, os números reais a, b e c são medidas dos lados de um triângulo se, e somente se,

$$\left|\begin{array}{l} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 1-c>c \\ 1-a>a \\ 1-b>b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} c<\frac{1}{2} \\ a<\frac{1}{2} \\ b<\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

10) (A) Seja x o segundo termo. Então o terceiro termo é $\dfrac{20+x}{2}$, o quarto termo é $\dfrac{20+x+\frac{20+x}{2}}{3}=\dfrac{20+x}{2}$ e, indutivamente, o n-ésimo termo é $\dfrac{20+x+(n-3)\frac{20+x}{2}}{n-1}=\dfrac{20+x}{2}$.
Assim, $6=\dfrac{20+x}{2}\Leftrightarrow x=-8$.

11) (C) Somando as equações, obtemos:

$$(x+y+z)^2 = 3\cdot 2006 \Leftrightarrow x+y+z = \pm\sqrt{3\cdot 2006}$$

Logo $x = \dfrac{2005}{\sqrt{3\cdot 2006}}$ e $y = \dfrac{2006}{\sqrt{3\cdot 2006}}$ e $z = \dfrac{2007}{\sqrt{3\cdot 2006}}$ ou

$x = -\dfrac{2005}{\sqrt{3\cdot 2006}}$ e $y = -\dfrac{2006}{\sqrt{3\cdot 2006}}$ e $z = -\dfrac{2007}{\sqrt{3\cdot 2006}}$.

12) (D) Como devemos usar pelo menos um quadrado 3×3 e um quadrado 2×2, a dimensão do quadrado colorido é pelo menos 5×5. E com mais dois quadrados 2×2 e quatro 1×1, acabamos de montá-lo. Portanto a quantidade de quadrados é menor ou igual a 8.
Temos ainda que a maior área que podemos obter respeitando as condições do problema e utilizando no máximo 7 quadrados é $5\cdot 9+4+1=50$ e, portanto, basta analisar o sistema:

$$\left|\begin{array}{l} 9x+4y+z=n^2 \\ \ x+y+z\le 7 \end{array}\right.$$

com $x, y, z \in Z_+^*$ e n = 5, 6 ou 7 para concluirmos que não é possível montar um quadrado colorido usando 7 ou menos quadrados.
As únicas soluções do sistema são (x, y, z) = (3, 2, 1) e (x, y, z) = (2, 1, 3), mas verifica-se que estas soluções não podem ser transformadas em uma montagem de um quadrado colorido.

13) (A) $\dfrac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}}\cdot\dfrac{4+y\sqrt{2006}}{4+y\sqrt{2006}} = \dfrac{4x-5y\cdot 2006+(xy-20)\sqrt{2006}}{16-2006y^2}$

Como $\sqrt{2006}$ é irracional, devemos ter $xy-20=0 \Leftrightarrow xy=20$.

14) (C) A soma de todas as notas é 71 + 76 + 80 + 82 + 91 = 400. A média de k números é inteira quando a soma dos k números é divisível por k. Assim, como 400 é divisível por 4 e a soma das quatro primeiras notas deve ser divisível por 4, o último número a ser digitado é múltiplo de 4, ou seja, é 76 ou 80.
Se o último número é 76, a soma dos outros quatro números é 400 – 76 = 324, que é múltiplo de 3. Seguindo um raciocínio análogo ao anterior, obtemos que o penúltimo número a ser digitado é múltiplo de 3. Mas nenhum dos cinco números é múltiplo de 3, absurdo.
Logo o último número é 80 (de fato, podem ocorrer as "ordens de digitação" 76, 82, 91, 71, 80 e 82, 76, 91, 71, 80).

15) (D)

$$\left|\begin{array}{c} \dfrac{AG}{AD}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{1}{2} \\ \angle DAB = 60^o + \angle GAB = \angle GAF \end{array}\right. \underset{LAL}{\Leftrightarrow} \Delta DAB \approx \Delta GAF$$, com razão de semelhança 2.

Portanto $\dfrac{BD}{FG} = 2.$.

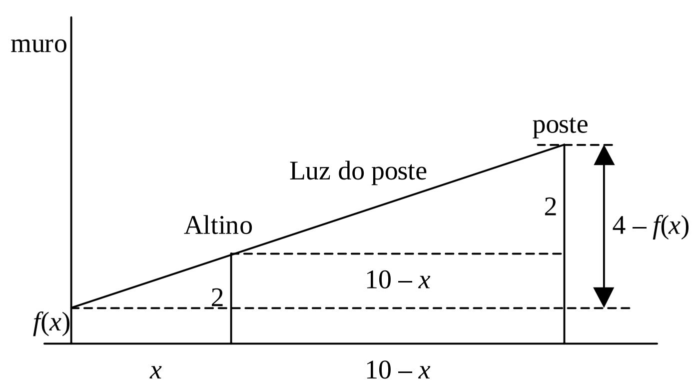
16) (D) Temos $2005 \le \sqrt{x} \le 2007 \Leftrightarrow 2005^2 \le x \le 2007^2$. Como $2005^2 = (2006 - 1)^2 = 2006^2 - 2 \cdot 2006 + 1$, o primeiro múltiplo de 2006 nesse intervalo é $2005^2 + 2005 = 2005 \cdot 2006$; os próximos múltiplos de 2006 são 2006^2, $2007 \cdot 2006$ e $2008 \cdot 2006 = (2007 + 1)(2007 - 1) = 2007^2 - 1$. Assim há 4 valores possíveis para x.

17) (A) Sendo O o centro do semicírculo maior, temos $OQ = OR = PS/2 = 2$. Como O pertence à semicircunferência menor, o ângulo $Q\hat{O}R$ é reto. Logo, pelo teorema de Pitágoras, o diâmetro do semicírculo menor é $2\sqrt{2}$.
A área destacada é, então, igual à soma das áreas do semicírculo menor e do quarto de círculo de centro O e extremidades Q e R subtraída da área do triângulo OQR, ou seja, $\frac{1}{2}\pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2}{2} = 2\pi - 2$.

18) (D) $\frac{3a+b}{4} + \frac{a+3b}{4} = a+b$; $\frac{3a+b}{4} - \frac{a+3b}{4} = \frac{a-b}{2}$.
Logo em todo par (x, y) obtido a soma é 2048 + 1024 = 3072 e, como a diferença inicial é 1024 uma potência de 2, a diferença é sempre da forma 2^k, k inteiro. De fato, estas condições são necessárias e suficientes para um par aparecer.
Assim, considerando que:
1664 +1408 = 3072 e 1664 – 1408 = 256,
1540 +1532 = 3072 e 1540 – 1532 = 8,
1792 +1282 = 3074,
1537 +1535 = 3072 e 1537 – 1535 = 2 e
1546 – 1526 = 20,
exatamente dois pares não podem ser obtidos.

19) (D) Na casinha da i-ésima linha, $1 \le i \le 13$, e j-ésima coluna, $1 \le j \le 17$, colocamos os números $17(i - 1) + j$ e $13(j - 1) + i$. Esses números são iguais se, e somente se, $17(i - 1) + j = 13(j - 1) + i$, ou seja, $4i = 3j + 1$, ou seja, $i = 3k + 1$ e $j = 4k + 1$, com k variando de 0 a 4. Assim, há 5 casinhas com o mesmo número.

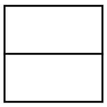
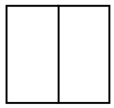
20) (A)

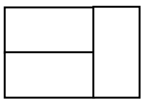
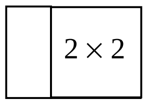


Na figura, há uma semelhança entre os triângulos retângulos de catetos 2 e 10 – x e de catetos 4 – $f(x)$ e 10. Logo $\frac{4-f(x)}{2}=\frac{10}{10-x} \Leftrightarrow f(x)=\frac{20-4x}{10-x}$, para $0 \le x \le 5$, cujo gráfico está melhor representado na alternativa A.

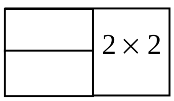
21) (D)

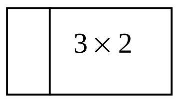
Começamos contando o número de maneiras de cobrir retângulos menores com tapetes 2×1:

i) 2×2:  e  : 2 maneiras

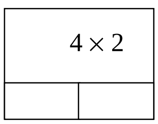
ii) 3×2:  + 

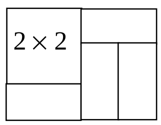
: 1 + 2 = 3 maneiras

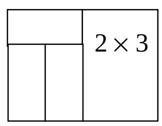
iii) 4×2: 

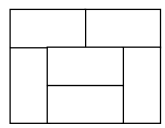
+ 

: 2 + 3 = 5 maneiras

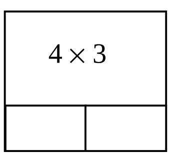
iv) 4×3: 

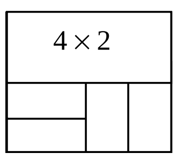
+ 

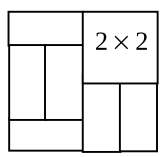
+ 

+  : 5 + 2 + 3 + 1 = 11 maneiras

No caso 4×4, o tapete que cobre o canto inferior esquerdo pode estar na horizontal ou na vertical, mas esses dois casos são simétricos, e o número de possibilidades em cada um deles é o mesmo. Vamos então contar o número de possibilidades no primeiro caso e multiplicar por dois:



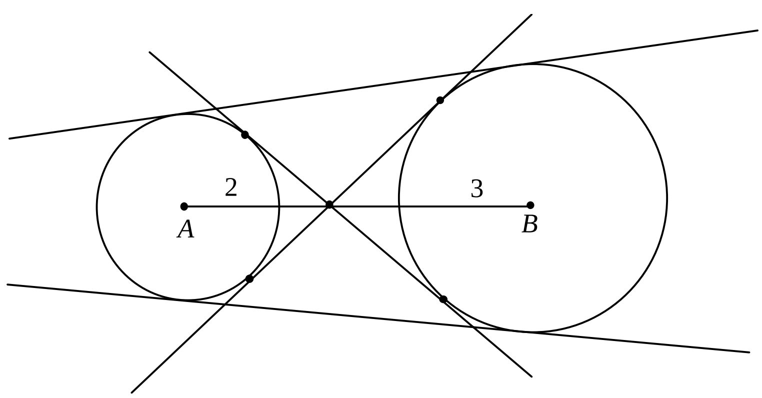
+ 

+ 

: 11 + 5 + 2 = 18 maneiras.

A resposta é, portanto: de $18 \times 2 = 36$ maneiras.

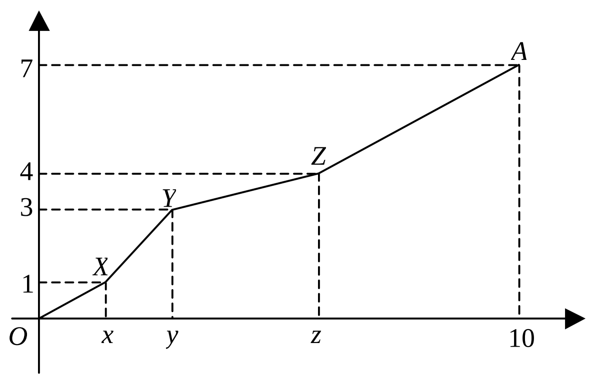
22) (D)



As retas que estão a 2 unidades de *A* são tangentes à circunferência de raio 2 com centro em *A*. As retas que estão a 3 unidades de *B* são tangentes à circunferência de raio 3 com centro em *B*. Como a distância entre os centros destas circunferências é maior do que a soma dos raios, há quatro tangentes a ambas circunferências, ou seja, há quatro retas que estão a 2 unidades de *A* e 3 de *B*.

23) (D) Os produtos são da forma $P_n = n(2160 - n) = 2160n - n^2$. Como $2160n$ sempre é múltiplo de 2160, o produto P_n será múltiplo de 2160 se, e somente se, n^2 é múltiplo de 2160.
Como $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$, n^2 é múltiplo de 2160 se, e somente se, n é múltiplo de $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Temos que, entre 1 e 2160, há $\dfrac{2160}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 12$ múltiplos de tal número.
Portanto, já que P_0 também é múltiplo, há 13 múltiplos de 2160 dentre os produtos.

24) (E)
Sejam $O = (0; 0)$, $X = (x; 1)$, $Y = (y; 3)$, $Z = (z; 4)$ e $A = (10; 7)$. Então a expressão do enunciado denota a soma das distâncias *OX*, *XY*, *YZ* e *ZA* que, pela desigualdade triangular, é maior ou igual a $OA = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149}$. Como é possível que ocorra a igualdade (basta tomarmos *O*, *X*, *Y*, *Z* e *A* colineares), o valor mínimo da expressão é $\sqrt{149}$.



25) (B) O plano *AEDF* divide o cubo em dois prismas de mesmo volume, ou seja, $\dfrac{1}{2}$. O plano *ABCD* divide cada prisma de dois sólidos: um deles é uma pirâmide de mesma base que o prisma (como, por exemplo, a pirâmide *ABFD*), de volume igual a um terço do volume do prisma, ou seja, $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$ e o outro, de volume $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$. Assim, há dois sólidos de volume máximo, igual a $\dfrac{1}{3}$.