

Geometria com Vetores

– Nível 3 –

Marcelo Mendes de Oliveira

marcelom@ceara.net

Semana Olímpica – Janeiro/2003 – Goiânia

01. (Teste IMO/1997) Em um triângulo isósceles ABC ($AC=BC$) seja O o seu circuncentro, D o ponto médio de AC e E, o baricentro do $\triangle DBC$. Mostre que a reta OE é perpendicular a BD.
02. (Bielo-Rússia/1998) Seja O um ponto no interior de um ângulo agudo de vértice A. H e N são os pés das perpendiculares de O aos lados do ângulo. Seja B um ponto sobre a bissetriz do ângulo e K, o pé da perpendicular de A a um dos lados do ângulo. Denote por P e F os pontos médios dos segmentos AK e HN, respectivamente. Sabendo que $ON+OH=BK$, prove que PF é perpendicular a AB.
03. (Bulgária/1990) Um triângulo ABC é dado. Uma reta paralela à base AB intersecta os lados AC e BC, respectivamente, em pontos interiores M e P. Seja D o ponto de interseção das retas AP e BM. Prove que a reta unindo os ortocentros dos triângulos ADM e BDP é perpendicular à reta CD.
04. Seja ABC um triângulo e P um ponto no plano de ABC. A perpendicular a AP por P intersecta a reta BC no ponto A'. Analogamente, defina B' e C'. Prove que A', B', C' são colineares.
05. (Romênia/1998) Seja ABC um triângulo isósceles ($AB=AC$), D o ponto médio de BC e E o ponto médio de AB.
 - a) Encontre o L.G. dos pontos M tais que $MC^2+MB^2=2MA^2+BC^2$.
 - b) Se P é o ponto comum do L.G. e AD, prove que $EP \perp AC$.
06. (Moldávia/1995) As diagonais de um quadrilátero inscrito ABCD têm um ponto H comum. Perpendiculares HM e HN aos lados BC e AD são traçadas. Prove que os pontos médios dos segmentos AB, CD, MN são colineares.
07. Seja E um ponto sobre o prolongamento por B do lado AB do quadrado ABCD. Seja F a interseção de DE e BC e G, a interseção de AF e CE. Prove que BG é perpendicular a DE.
08. Sobre um triângulo retângulo ABC de hipotenusa BC, construímos externamente quadrados BCDE e ACFG. Seja M o ponto de interseção das retas AE e BF. Mostre que M está sobre o perímetro do quadrado inscrito em ABC com lados paralelos aos catetos.