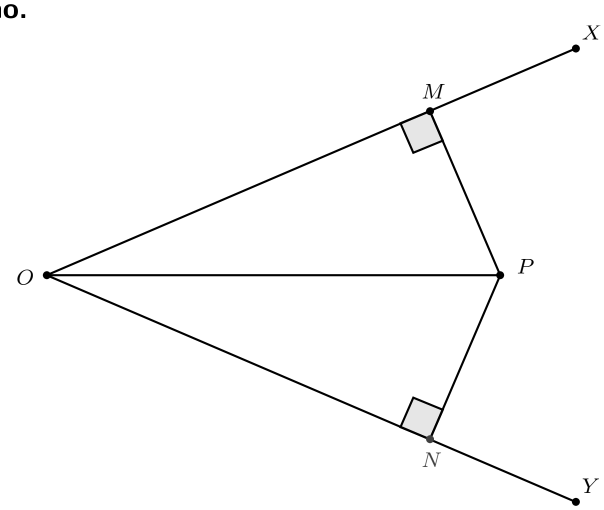
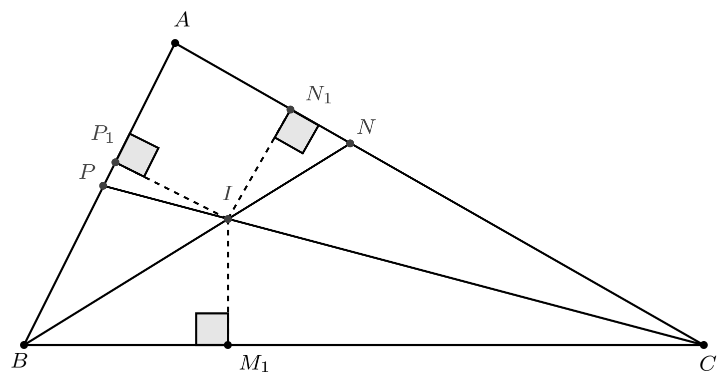
Bissetrizes e suas propriedades.

Teorema 1. Seja $\angle XOY$ um ângulo dado e P um ponto em seu interior. Então, a distância de P a XO é igual à distância de P a YO se, e somente se, o ponto P pertence à bissetriz.
Demonstração.

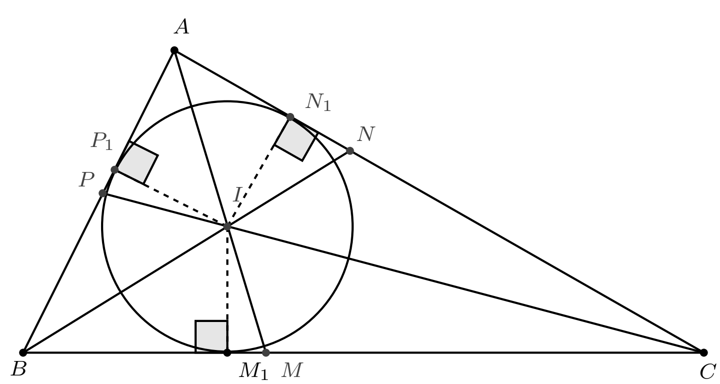


Suponhamos inicialmente que o ponto P pertence à bissetriz. Então $\angle XOP = \angle YOP$. Sejam M e N os pés das perpendiculares baixadas desde P sobre OX e OY, respectivamente. Podemos concluir, que $\Delta MOP \equiv \Delta NOP$, pelo caso **L.A.A.**, pois OP é lado comum, $\angle MOP = \angle NOP$ e $\angle OMP = \angle ONP = 90°$. Portanto, $PM = PN$.
Reciprocamente, suponhamos agora que $PM = PN$. Pelo caso especial de congruência de triângulos, cateto-hipotenusa, os triângulos MOP e NOP são congruentes. Portanto, $\angle MOP = \angle NOP$, e assim, P pertence à bissetriz.

Provemos agora que as três bissetrizes de um triângulo ABC se intersectam num ponto chamado incentro, que é equidistante dos lados do triângulo.

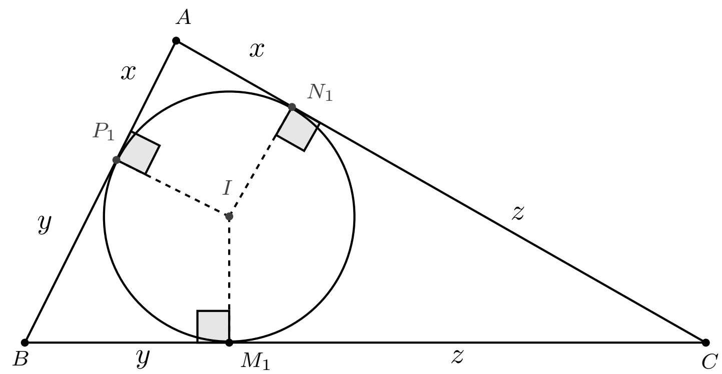


Sejam BN e CP as bissetrizes relativas aos vértices B e C, respectivamente, e I o seu ponto de interseção. Como o ponto I pertence às bissetrizes BN e CP, então $IM_1 = IP_1$ e $IM_1 = IN_1$, em que M_1, N_1, P_1 são os pés das perpendiculares baixadas desde I sobre os lados BC, CA e AB, respectivamente. Como $IP_1 = IN_1$, então, pela proposição anterior, I pertence à bissetriz do ângulo $\angle A$. Portanto, as três bissetrizes passam por um mesmo ponto chamado incentro que será o centro da circunferência inscrita no triângulo pois I equidista dos lados do triângulo. Além disso, M_1, N_1 e P_1 são os pontos de tangência do círculo com os lados BC, CA e AB, respectivamente.



Teorema 2. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Sejam M_1, N_1 e P_1 os pontos de tangência com os lados BC, CA e AB, respectivamente. Então, $AN_1 = AP_1 = p - a$, $BM_1 = BP_1 = p - b$ e $CM_1 = CN_1 = p - c$, em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração.



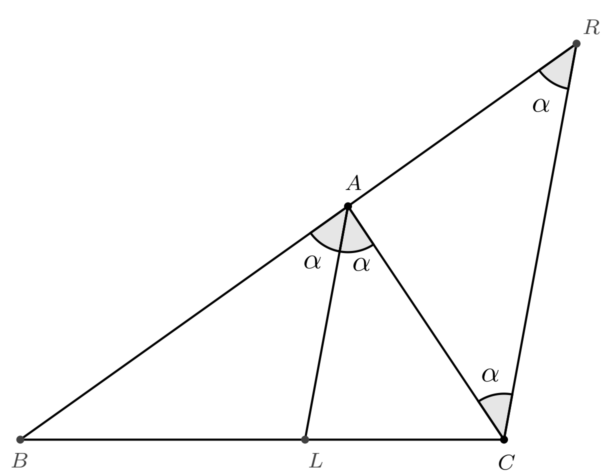
Temos que $y + z = a$, $x + z = b$ e $x + y = c$. Resolvendo o sistema encontramos $x = p - a$, $y = p - b$ e $z = p - c$.

Teorema 3. (Bissetriz interna) A bissetriz interna AL do ângulo $\angle A$ de um triângulo ABC divide internamente o lado oposto BC na razão $\dfrac{AB}{CA}$, ou seja,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

em que L é o ponto de intersecção da bissetriz interna com o lado BC.

Demonstração.



Seja R a intersecção da paralela à bissetriz AL traçada pelo ponto C. É fácil ver que $\angle BAL = \angle CAL = \angle ACR = \angle ARC$, com isso, $AR = AC$. Pelo teorema de Tales temos que

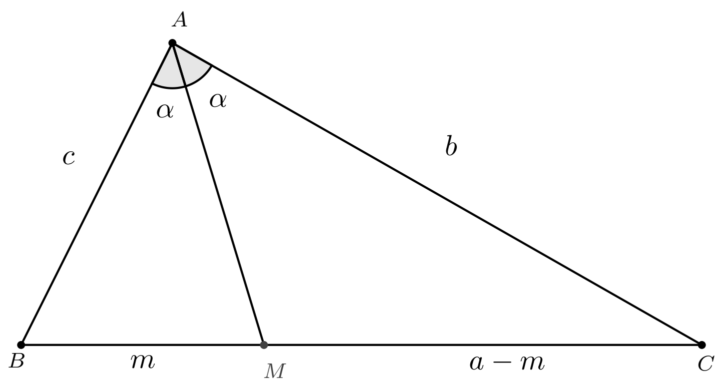
$$\frac{AB}{AR} = \frac{BL}{LC}.$$

Como $AR = AC$, então

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$

Teorema 4. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ e seja AM a bissetriz relativa ao ângulo $\angle A$, com M em BC. Então, $BM = \dfrac{a \cdot c}{b + c}$.

Demonstração.



Usando o teorema da bissetriz interna temos que

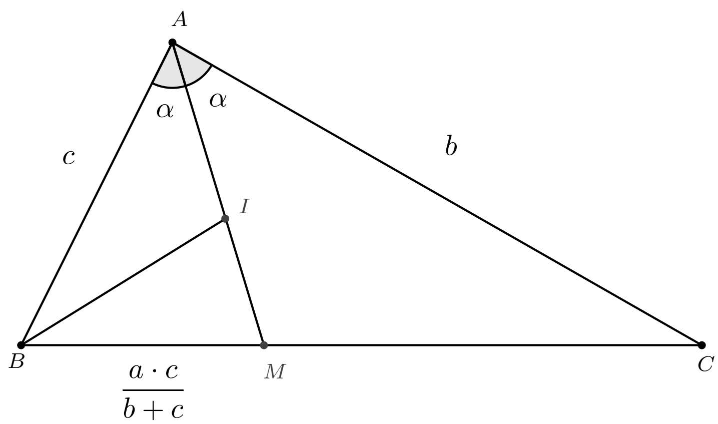
$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Leftrightarrow \frac{c}{m} = \frac{b}{a-m} \Leftrightarrow m = \frac{a \cdot c}{b + c}.$$

Teorema 5. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, AM a bissetriz relativa ao ângulo $\angle A$, com M em BC, e seja I o incentro. Então, $\dfrac{AI}{IM} = \dfrac{b + c}{a}$.

Demonstração.

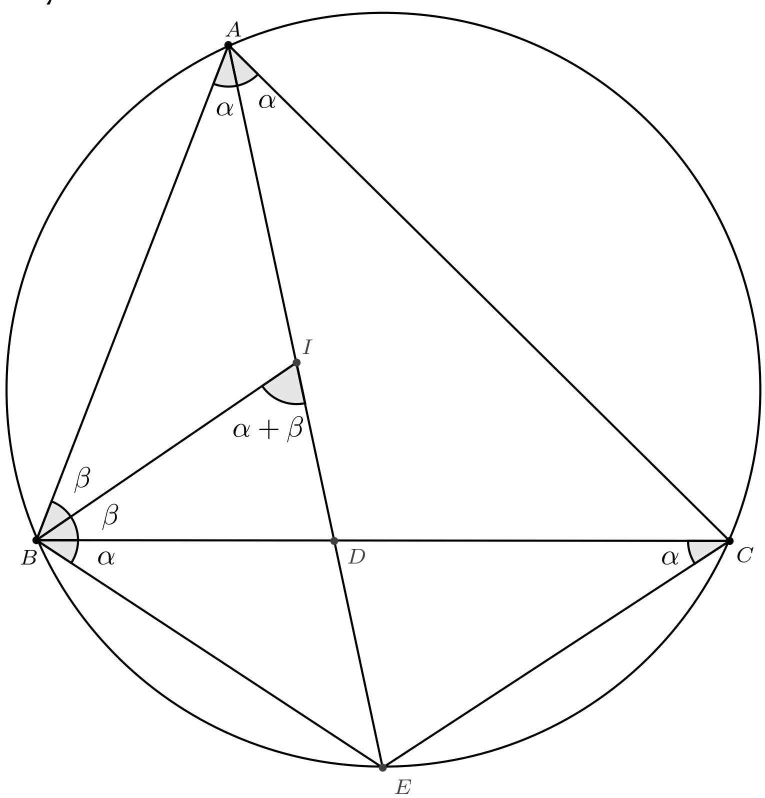
Aplicando o teorema da bissetriz interna no triângulo BAM temos que

$$\frac{AI}{IM} = \frac{AB}{BM} \Leftrightarrow \frac{AI}{IM} = \frac{b + c}{a}.$$



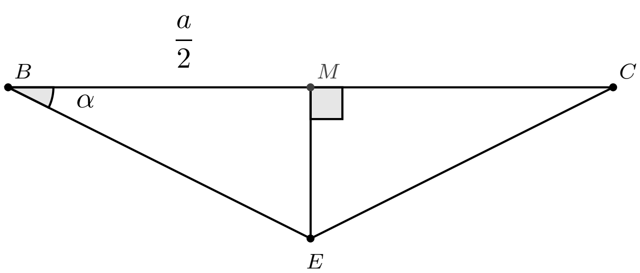
Teorema 6. Seja ABC um triângulo e I seu incentro. Seja E o ponto de interseção de AI com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Então $EI = EB = EC$.

Demonstração.



É fácil ver que $\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE$ e, portanto, $BE = CE$. Além disso, pela propriedade do ângulo externo, $\angle BIE = \alpha+\beta$. Portanto, $\angle BIE = \angle IBE$ e $BE = IE$.

Observe agora uma parte da figura acima.

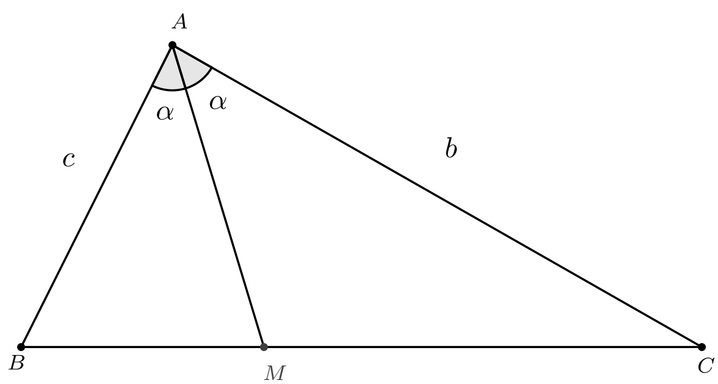


Temos que

$$\cos\alpha = \frac{BM}{BE} \Leftrightarrow BE = \frac{a}{2\cos\alpha} = CE = IE.$$

Teorema 7. Seja ABC um triângulo tal que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ e seja AM a bissetriz relativa ao ângulo $\angle A$, com M em BC. Além disso, $\angle BAM = CAM = \alpha$. Então $AM = \dfrac{2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}{b+c}$.

Demonstração.



É fácil ver que $[ABC] = [BAM] + [CAM]$. Então,

$$\frac{b\cdot c\cdot\sin 2\alpha}{2} = \frac{c\cdot AM\cdot\sin\alpha}{2} + \frac{b\cdot AM\cdot\sin\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$AM = \frac{2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}{b+c}.$$

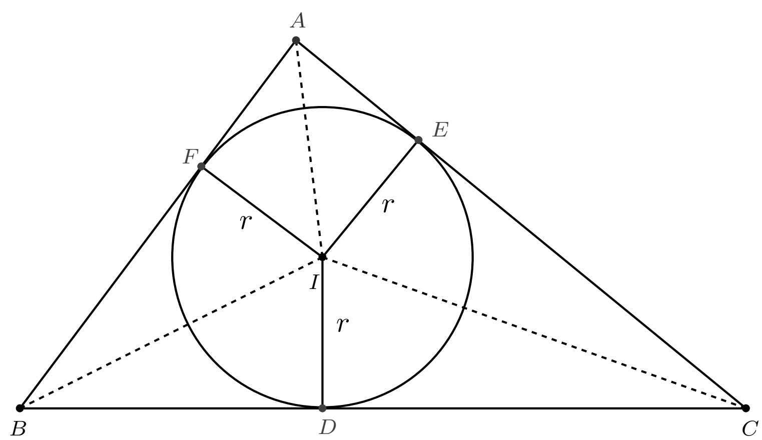
Teorema 8. (Área de um triângulo em função do raio da circunferência inscrita.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente, e seja r a medida do raio da circunferência inscrita. Então, a área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = p \cdot r,$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

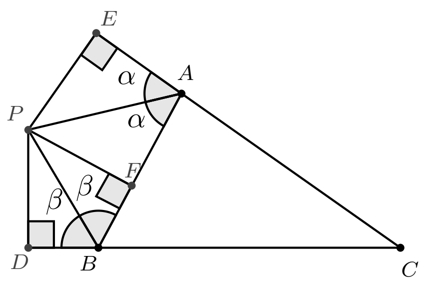
Demonstração.



$$[\Delta ABC] = [\Delta BIC] + [\Delta CIA] + [\Delta AIB] \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = p \cdot r.$$

Teorema 9. As bissetrizes externas de quaisquer dois ângulos de um triângulo são concorrentes com a bissetriz interna do terceiro ângulo.

Demonstração.



No triângulo ABC traçamos as bissetrizes externas dos ângulos $\angle A$ e $\angle B$ os quais se intersectam em P. Do teorema 1, como P pertence à bissetriz externa do ângulo $\angle A$, então $PE = PF$. Além disso, P pertence à bissetriz externa do ângulo $\angle B$, então $PF = PD$. Como $PD = PE$, pelo teorema 1, concluímos que P pertence à bissetriz do ângulo $\angle C$. Dessa forma, se P equidista dos três lados do triângulo ABC e é um ponto no exterior do triânglo então P é o centro de uma das três circunferências ex - inscritas do trângulo ABC. A circunferência com centro I_a e raio r_a é uma das três circunferências ex - inscritas que representaremos apenas por (I_a, r_a). Analogamente são definidas as circunferências (I_b, r_b) e (I_c, r_c). Os pontos I_a, I_b e I_c são os ex - incentros. Cada circunferência ex - inscrita toca um dos lados do triâgulo internamente e os outros dois externamente, ou seja, toca no prolongamento. Na figura a seguir, observe que pela propriedade de segmentos tangentes a uma circunferência, vulgarmente conhecido com **Teorema do bico**, temos que $BL = BG$, além disso

$$BL + BG = (BC + CL) + (AG + AB)$$

$$= BC + CE + AE + AB = a + b + c = 2p.$$

Portanto, as tangentes traçadas por B à circunferência (I_b, r_b) tem medida p. Dessa forma é fácil ver que

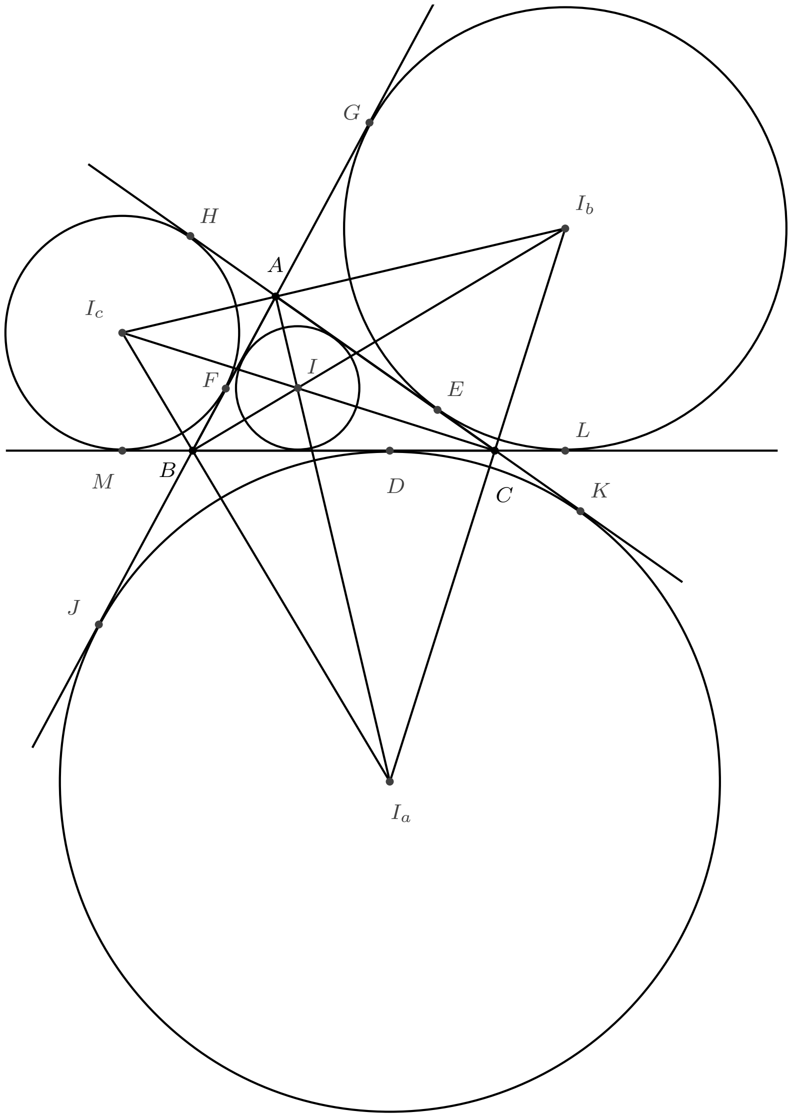
$$AJ = AK = BG = BL = CH = CM = p.$$

Além disso, $CL = BL - BC = p - a$. Então,

$$BM = BF = CL = CE = p - a,$$

$$CK = CD = AH = AF = p - b,$$

$$AG = AE = BJ = BD = p - c.$$

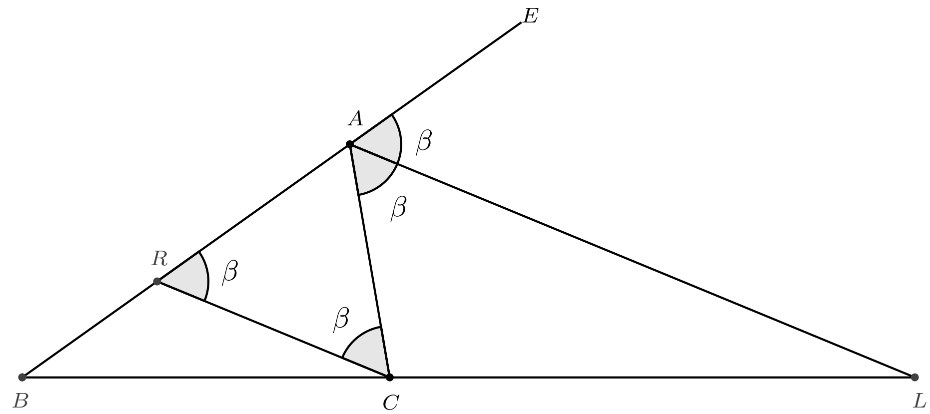


Teorema 10. (Bissetriz externa) A bissetriz externa AL do ângulo $\angle A$ de um triângulo ABC divide externamente o lado oposto BC na razão $\dfrac{AB}{CA}$, ou seja,

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}$$

em que L é o ponto de intersecção da bissetriz externa com o lado BC.

Demonstração.



Seja R a intersecção da paralela à bissetriz AL traçada pelo ponto C. É fácil ver que $\angle EAL = \angle CAL = \angle ACR = \angle ARC$, com isso, $AR = AC$. Pelo teorema de Tales temos que

$$\frac{AB}{AR} = \frac{BL}{LC}.$$

Como $AR = AC$, então

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$

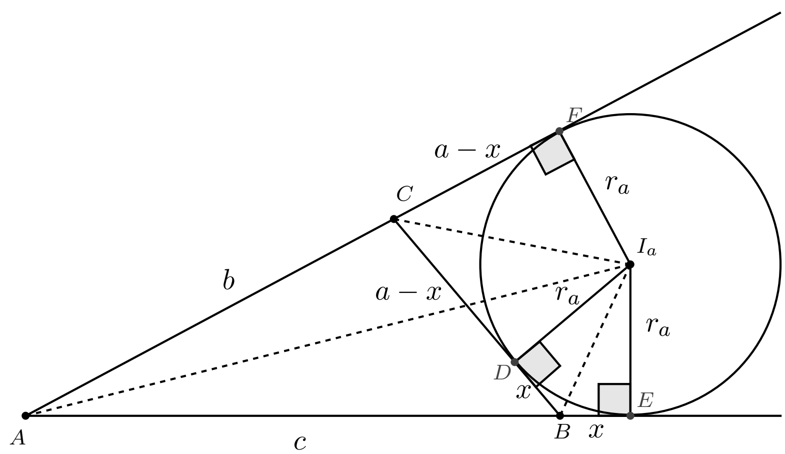
Teorema 11. (Área de um triângulo em função do raio de uma circunferência ex - inscrita.)

Sejam a, b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo ΔABC, respectivamente, e sejam r_a, r_b e r_c os raios das circunferências ex - inscritas relativas aos lados a, b e c, respectivamente. Então, a área do triângulo ΔABC pode ser calculada por

$$[\Delta ABC] = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c),$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Demonstração.



Pela propriedade dos segmentos tangentes, temos que $DB = BE = x$ e $DC = CF = a - x$. Então,

$$[\Delta ABC] = [\Delta AI_aE] + [\Delta AI_aF] - 2[\Delta BCI_a] \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = \frac{(c+x)\cdot r_a}{2} + \frac{(b+a-x)\cdot r_a}{2} - 2\cdot\frac{a\cdot r_a}{2} \Leftrightarrow$$
$$[\Delta ABC] = \frac{r_a}{2}\cdot(a+b+c-2a) = \frac{r_a}{2}\cdot(2p-2a) = r_a(p-a).$$

Analogamente,

$$[\Delta ABC] = r_b(p-b) = r_c(p-c),$$

Exercícios propostos

1. (IMO Shortlist) Seja ABC um triângulo tal que $AB + BC = 3AC$. Sejam I o seu incentro e D e E os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados AB e BC, respectivamente. Além disso, sejam K e L os simétricos de D e E com relação ao incentro I. Prove que o quadrilátero $ACKL$ é inscritível.

2. (Teste de seleção do Brasil para IMO) Seja I o incentro do triângulo ABC e D o ponto de interseção de AI com o círculo circunscrito de ABC. Sejam E e F os pés das perpendiculares baixadas a partir de I sobre BD e CD, respectivamente. SE $IE + IF = \dfrac{AD}{2}$, determine o ângulo BAC.

3. (OBM) O triângulo ABC é retângulo em B. Sejam I o centro da circunferência inscrita em ABC e O o ponto médio do lado AC. Se $\angle AOI = 45°$, quanto mede, em graus, o ângulo $\angle ACB$?

4. (IMO) O prolongamento da bissetriz AL do triângulo acutângulo ABC encontra o círculo circunscrito em N. Por L traçam - se perpendiculares LK e LM aos lados AB e AC, respectivamente. Prove que a área do triângulo ABC é igual à área do quadrilátero $AKNM$.

5. Num triângulo ABC tem - se $AB = BC$, e D é um ponto sobre a base AC tal que o raio do círculo inscrito no triângulo ABD é igual ao raio do círculo tangente ao segmento DC e aos prolongamentos das retas BD e BC. Prove que o raio deste círculo é igual a $\dfrac{1}{4}$ da medida h de uma das alturas iguais do triângulo ABC.

6. Seja um quadrilátero $ABCD$ inscrito num círculo de tal forma que os prolongamentos dos lados AD e BC se encontram em Q e os prolongamentos de AB e CD, em P. Prove que as bissetrizes dos ângulos $\angle DQC = \angle APD$ são perpendiculares.

7. Do incentro de um triângulo retângulo, avista - se a metade da hipotenusa, isto é, o segmento que une um vértice ao ponto médio da hipotenusa, segundo um ângulo reto. Se $\dfrac{m}{n}$ é a fração irredutível que expressa a razão entre as medidas dos catetos deste triângulo, então $m + n$ é igual a:
(a) 7 (b) 17 (c) 23 (d) 31 (e) 41

8. O círculo, de centro O, inscrito no triângulo ABC é cortado pela mediana AD nos pontos X e Y. Sabendo que $AC = AB + AD$, determine a medida do ângulo $\angle XOY$.

9. (OCM) Seja ABC um triângulo cuja medida dos lados são números inteiros e consecutivos. Além disso, o maior ângulo $\angle A$ é o dobro do menor ângulo. Determine a medida dos lados deste triângulo.

10. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo não trapézio, de diagonais AC e BD iguais. Tomamos sobre os lados AB e CD, respectivamente, pontos P e Q tais que:
$$\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC} = \frac{AD}{BC}.$$
Mostre que os pontos P e Q são colineares com o ponto de interseção das mediatrizes dos lados AD e BC.

11. (Coréia) Seja ABC um triângulo tal que as suas bissetrizes intersectam os lados BC, CA e AB nos pontos L, M e N e o círculo circunscrito ao triângulo nos pontos P, Q e R, respectivamente. Prove que

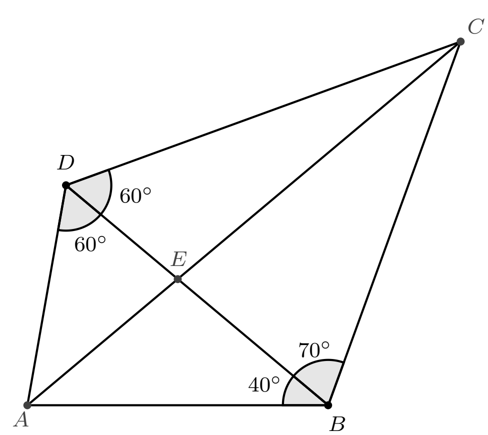
$$\frac{AL}{LP} + \frac{BM}{MQ} + \frac{CN}{NR} \geq 9.$$

12. (Teste de seleção do Brasil para IMO) Em um triângulo ABC a bissetriz do ângulo A intersecta o lado BC no ponto A_1 e o círculo circunscrito no ponto A_2. Os pontos B_1, B_2 e C_1, C_2 são obtidos analogamente. Prove que

$$\frac{A_1A_2}{BA_2 + CA_2} + \frac{B_1B_2}{CB_2 + AB_2} + \frac{C_1C_2}{AC_2 + BC_2} \geq \frac{3}{4}.$$

13. Sejam ABC um triângulo, M o pé da bissetriz interna do ângulo A e N o pé da bissetriz interna do ângulo $\angle B$. Suponha que MN seja bissetriz do ângulo $\angle AMC$. Calcule a medida do ângulo $\angle A$.

14. No quadrilátero $ABCD$ determine a medida do ângulo $\angle AED$.



15. (OBM) Um triângulo ABC, de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, tem perímetro $2p$. Uma circunferência tangencia o lado BC e os prolongamentos dos lados AB e AC nos pontos P, Q e R, respectivamente. O comprimento AR é igual a:
(a) $p - a$ (b) $p - b$ (c) $p - c$ (d) p (e) $2p$

16. Prove que os três segmentos determinados por um vértice e pelo ponto de tangência da circunferência ex - inscrita com o lado oposto a esse vértice são concorrentes em um ponto chamado ponto de Nagel.

17. (OBM) A medida do ângulo $\angle B$ de um triângulo ABC é $120°$. Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB, tais que BM é a bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle ACB$. O segmento MK intersecta BC no ponto P. Prove que $\angle APM = 30°$.

18. (Leningrado) Sejam AF, BG e CH as bissetrizes de um triângulo ABC que tem ângulo A medindo 120^o. Prove que o ângulo GFH mede 90^o.

19. Seja $ABCD$ um paralelogramo e seja l uma reta variável passando pelo vértice A que intersecta as retas BC e DC nos pontos X e Y, respectivamente. Sejam K e L os centros das circunferências ex - inscritas aos triângulos ABX e ADY, tangenciando os lados BX e DY, respectivamente. Prove que a medida do ângulo $\angle KCL$ não depende da escolha de l.

20. (Belarus) Seja O o centro do círculo ex - inscrito do triângulo ABC oposto ao vértice A. Seja M o ponto médio de AC e seja P a interseção das retas MO e BC. Prove que se $\angle BAC = 2\angle ACB$, então $AB = BP$.

21. (IMO) Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita é tangente ao lado BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F, e as retas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC, e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC. Prove que M é o ponto médio de ST.
(A circunferência ex-inscrita de ABC oposta ao vértice A é a circunferência tangente ao segmento BC, ao prolongamento do segmento AB no sentido de A para B e ao prolongamento do segmento AC no sentido de A para C.)