Geometria na Moral

Yuri Lima

17 de janeiro de 2008

Resumo

Existem duas perspectivas principais no ataque a problemas de geometria plana: analítica ou sintética, também conhecidas como geometria paulista e geometria cearense. Daremos aplicações de problemas cuja resolução pela primeira é trabalhosa enquanto pela segunda é simples, se interpretarmos bem o problema e suas condições. Concentraremos nossa atenção em dois resultados: Teorema da Borboleta e Reta de Simpson.

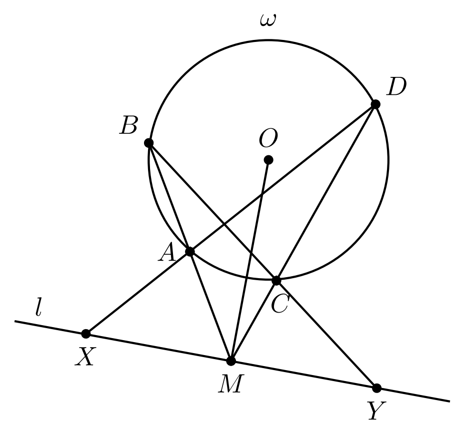
1 Motivação

Problema 1. (Banco IMO 1995) Seja ABC um triângulo com $AC < BC$. Sejam F, H e O o pé da altura relativa ao lado AB, H o ortocentro de ABC e O o circuncentro de ABC. Seja também P a interseção de AC com a perpendicular a OF passando por F. Mostre que $\angle PHF = \angle BAC$.

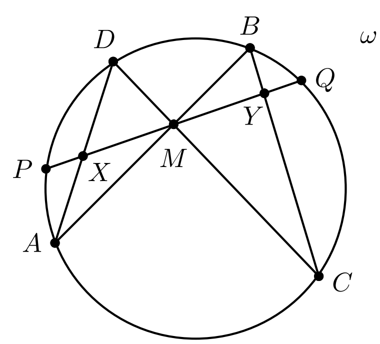
Problema 2. (IMO 2007) São dados cinco pontos A, B, C, D, E no plano tais que $ABCD$ é um paralelogramo e $BCED$ é um quadrilátero cíclico (e convexo). Seja l uma reta que passa por A. Suponha que l intersecta o segmento DC num ponto interior F e a reta BC em G. Suponha também que $EF = EG = EC$. Prove que l é a bissetriz do ângulo DAB.

2 Os Teoremas

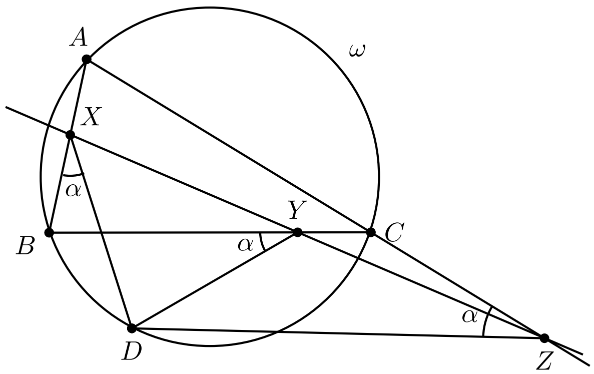
Teorema 1. (da Borboleta Generalizado) Dadas uma circunferência ω de centro O e uma reta l, seja M a projeção de O sobre l. Sejam também r, s duas retas passando por M que definem cordas AB e CD em ω. Se AD e BC intersectam l em X e Y, então M é o ponto médio do segmento XY.



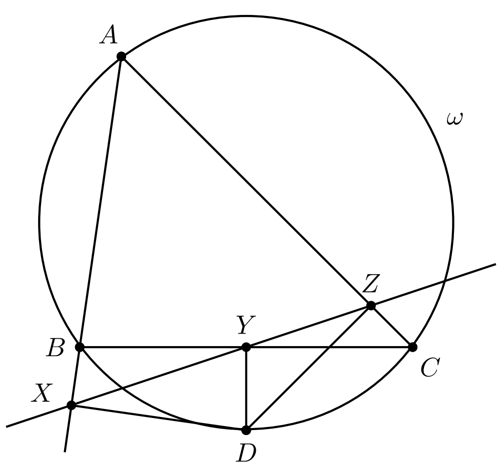
Corolário 1. (Teorema da Borboleta) Dada uma circunferência ω, sejam PQ uma corda de ω e M o ponto médio de PQ. Sejam também AB e CD cordas de ω passando por M. Se AD e BC intersectam PQ em X e Y, então M é o ponto médio do segmento XY.



Teorema 2. (Reta de Simpson generalizado) Seja ABC um triângulo de circuncírculo ω. Dados um ponto D e um ângulo α, sejam X, Y, Z pontos sobre as retas AB, BC, CA tais que as retas DX, DY, DZ formam um ângulo α com as retas AB, BC, CA, respectivamente, na mesma orientação. Então X, Y, Z são colineares se e somente se D pertence à circunferência ω.



Corolário 2. (Reta de Simpson) Seja ABC um triângulo de circuncírculo ω. Dado um ponto qualquer D, sejam X, Y, Z as projeções de D sobre as retas AB, BC, CA. Então X, Y, Z são colineares se e somente se D está em ω.



3 Aplicações

Problema 3. (Vingança Olímpica 2003) Seja ABC um triângulo com $\angle BAC = 60^o$. Sejam A' o simétrico de A com relação a BC, D o ponto sobre AC tal que $AB = AD$ e H o ortocentro de ABC. Se l é a bissetriz externa de $\angle BAC$, $M = A'D \cap l$ e $N = CH \cap l$, mostre que $AM = AN$.

Problema 4. (Rioplatense 2003) Seja ω o circuncírculo do triângulo ABC e O seu circuncentro. Por C, construímos uma reta tangente a ω que intersecta AB em M. Uma reta por M e perpendicular a OM intersecta os prolongamentos de BC e AC em P e Q, respectivamente. Mostre que $PM = MQ$.