Olimpíada Brasileira de Matemática

XII Semana Olímpica

Geometria Vetorial

Primeira parte:

- O que é um vetor.
- Operações com vetores.
- Paralelismo.

01. (OMERJ – 2003) Dado um triângulo XYZ, denomina-se "filho" de XYZ o triângulo X'Y'Z' tal que X' pertence à YZ, Y' pertence XZ, Z' pertence à XY e XZ' = 2YZ'; ZY' = 2XY' e YX' = 2ZX'. Dado um triângulo ABC qualquer, seja $A_1B_1C_1$. o seu filho, seja $A_2B_2C_2$ o filho de $A_1B_1C_1$, e, mais geralmente, seja $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ o filho de $A_nB_nC_n$. Prove que o baricentro do triângulo ABC pertence ao interior de $A_nB_nC_n$ para todo n inteiro positivo.

02. (www.mccme.ru) Num triângulo ABC, P, Q e R são pontos, respectivamente, pertencentes aos lados AB, BC e CA, tais que $\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RA}=\frac{1}{n}$ e no triângulo PQR, S, T e U são pontos, respectivamente, pertencentes aos lados PQ, QR e RP, tais que $\frac{PS}{SQ}=\frac{QT}{TR}=\frac{RU}{UP}=n.$ Prove que:

a) $US \parallel AB$, $ST \parallel BC$ e $TU \parallel CA$.

b) $\frac{US}{AB}=\frac{ST}{BC}=\frac{TU}{CA}=\frac{(n^2-n+1)}{(n+1)^2}$.

03. (Leningrado - 1980) Um segmento em um quadrilátero convexo é chamado de mediana se ele une pontos médios de lados opostos. Mostre que se a soma das medianas de um quadrilátero é igual ao seu semiperímetro, então o quadrilátero é um paralelogramo.

04. (Ibero americana - 1986) Seja ABCD um quadrilátero plano convexo. P e Q são pontos de AD e BC, respectivamente, tais que $\frac{AP}{PD}=\frac{AB}{DC}=\frac{BQ}{QC}$. Demonstre que os ângulos que a reta PQ forma com as retas AB e CD são iguais.

05. (APMO – 1994) Dado um triângulo não degenerado ABC, com circuncentro O, ortocentro H e raio do círculo circunscrito R, prove que $OH < 3R$.

Segunda parte:

- Produto interno
- Ângulos.
- Perpendicularidade.

06. Prove o teorema de Euler: em um quadrilátero ABCD com medianas MN e PQ,

$$AC^2+BD^2=2\left(MN^2+PQ^2\right).$$

07. Um n-ágono regular $A_1\ldots A_n$ está inscrito num círculo de centro O e raio R. X é qualquer ponto tal que $OX=d$. Prove que $\sum_{i=1}^{n} A_iX^2=n\left(R^2+d^2\right)$.

08. (USAMO – 1975) Sejam A, B, C e D quatro pontos no espaço, onde AB é a distância entre A e B e assim por diante. Mostre que

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2 \geq AB^2+CD^2.$$

09. (USAMO – 1990) ABC é um triângulo acutângulo. O círculo de diâmetro AB intercepta a altura relativa a C em P e Q. O círculo de diâmetro AC encontra a altura relativa a B em R e S. Mostre que P, Q e R são concíclicos.

10. (Shortlist da IMO – 1990) Num triângulo escaleno ABC, sejam G, I e H seu baricentro, incentro e ortocentro, respectivamente. Prove que $\angle GIH > 90°$.

Terceira parte:

- Produto vetorial.
- Áreas.
- Colinearidade.

11. Num pentágono ABCDE sejam G_1, G_2, G_3 e G_4, respectivamente, os baricentros dos triângulos ABC, ACD, ADE e ABE.

a) Prove que o quadrilátero $G_1G_2G_3G_4$ é um paralelogramo.

b) Determine a razão entre as áreas dos quadriláteros $G_1G_2G_3G_4$ e BCDE.

12. (Grécia – 1984) Seja $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ um hexágono convexo tendo seus lados opostos paralelos. Prove que os triângulos $A_1A_3A_5$ e $A_2A_4A_6$ têm áreas iguais.

13. (Bálcãs – 1996) Seja ABCDE um pentágono convexo e sejam M, N, P, Q e R os pontos médios dos lados AB, BC, CD, DE e EA, respectivamente. Se os segmentos AP, BQ, CR e DM têm um ponto comum, mostre que esse ponto pertence a EN.

14. (Áustria) Uma reta intercepta as retas suportes dos lados BC, CA e AB do triângulo ABC nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Os pontos A_2, B_2 e C_2 são simétricos de A_1, B_1 e C_1 em relação aos pontos médios de BC, CA e AB, respectivamente. Prove que A_2, B_2 e C_2 são colineares.

Bibliografia recomendada:

Engel, Arthur. **Problem-solving strategies.**

Larson, Loren C. **Problem-solving through problems.**

Kedlaya, Kiran. **Notes on Euclidean Geometry.**

Hahn, Liang-shin. **Complex Numbers & Geometry.**

Andreescu, Tittu. **Complex number from A to …Z.**