Grafos

Professor Paulo José Bonfim Gomes Rodrigues, Fortaleza – CE

1. Considere um grafo G com n vértices e que não contém um subgrafo completo com três vértices. Suponha, além disso, que para cada dois vértices não adjacentes x e y existem exatamente dois vértices que são adjacentes a ambos (x e y). Mostre que existe um inteiro $p \geq 0$ tal que $n = 1 + \binom{p+1}{2}$. Também mostre que G é regular de grau p.

2. Mostre que um grafo G com n vértices e m arestas contém no mínimo $\frac{4m}{3n}\left(m - n^2/4\right)$ triângulos.

3. Mostre que um torneio com n vértices contém no máximo $\frac{1}{4}\binom{n+3}{3}$ circuitos com três vértices. Prove que a igualdade pode ocorrer para cada n ímpar.

4. Mostre que todo grafo com n vértices e $m > \frac{n}{4}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)$ arestas contém no mínimo um ciclo elementar com quatro vértices.

5. (**Teorema da Amizade)** Suponha que G é um grafo tal que, se x e y são quaisquer dois vértices de G, então existe um único vértice z adjacente a ambos. Então existe um vértice adjacente a todos os outros.