Problemas em Teoria dos Grafos

Sobre o número de arestas

Um grafo pode ser representado por um diagrama de pontos (vértices) e linhas (arestas) ligando estes pontos. O que importa neste diagrama é sabermos se dois vértices dados são ligados ou não por alguma aresta. Se uma aresta liga algum vértice a outro, dizemos que esta aresta incide no dado vértice. O número de arestas que incidem num dado vértice é chamado **grau** desse vértice.

Observações Importantes:
1) Em todo grafo, a soma dos graus de todos os vértices é igual a duas vezes o número de arestas.
2) Em todo grafo, é par o número de vértices de grau ímpar.

Problema 1

Na cidade de *Épsilon* existem 15 casas e em cada uma delas um telefone. É possível conectar estas casas com linhas telefônicas de modo que cada telefone seja conectado a exatamente 5 outros?

Problema 2

Em um certo reino, existem 100 cidades, e quatro estradas partem de cada cidade. Quantas estradas existem no reino?

Problema 3

Mostre que em todo grupo de pessoas, existem pelo menos duas que possem o mesmo número de conhecidos no grupo.

Problema 4

Um grafo G possui n vérties ($n > 3$), de modo que nenhum vérice tenha grau $n - 1$. Suponha que quaisquer dois vértices de G possuam exatamente um vértice vizinho.
(i) Se x e y não são adjacentes, prove que eles têm o mesmo grau.
(ii) Agora, prove que o grafo é regular (todos os vértices possuem o mesmo grau).

Sobre conexidade

Um grafo é chamado **conexo** ou **conectado** se for possível ir de qualquer vértice a qualquer outro por um caminho sobre as arestas.

Problema 5

Em um país existem 15 cidades, cada uma das quais é ligada por uma estrada e no mínimo 7 outras. Prove que é possível viajar de uma cidade a qualquer outra cidade, possivelmente passando por algumas cidades inermediárias.

Problema 6

Prove que se um grafo possui n vértices, cada um dos quais com grau no mínimo $(n - 1)/2$, então ele é conexo.

Problema 7

Em um país existe somente um tipo de meio de transporte: o tapete voador. Vinte e uma linhas de tapete voadores servem a capital. Uma única linha voa para Vilonge e todas as outras cidades são servidas por exatamente 20 linhas de tapetes. Mostre que é possível viajar de tapete mágico da capital a Vilonge (talvez utilizando mais de uma linha).

Árvores

Uma **árvore** é um grafo conectado que não possui ciclos. Aqui, entendemos por ciclo como sendo um caminho que parte de um vértice e volta para o mesmo vértice.

Problema 8

Se um grafo é uma árvore, mostre que só existe um caminho ligando quaisquer dois vértices dados. Mostre que a recíproca também é verdadeira.

Problema 9

Prove que toda árvore possui pelo menos dois vértices de onde só parte uma aresta de cada, ou seja, dois vértices com grau 1. Neste caso, chamamos estes vértices de **folhas**. Em outras palavras, estou pedindo para mostrar que toda árvore possui pelo menos duas folhas!:)

Problema 10

Em Existem 101 cidades em *A*rbórea. Algumas delas são conectadas por estradas, e cada par de cidades é conectado por um e somente um caminho simples. Quantas estradas existem?

Problema 11

Todos os vértices de um grafo possuem grau 3. Prove que o grafo possui um ciclo.

Problema 12

Suponha que uma árvore possua exatamente um vértice de grau i, para cada $i = 2, \cdots, m$, e todos os outros vértices tenham grau 1. Quantos vértices possui a árvore?

Problemas Gerais

Problema 13

Um tabuleiro tem a forma de uma cruz, obtida apagando-se os quadrados dos cantos de um tabuleiro 4×4. É possível que um cavalo faça um passeio nesse tabuleiro, passando por cada casa exatamente uma vez, terminando na mesma casa que começou?

Problema 14

Prove que não existe um grafo com 5 vértices de graus $4, 4, 4, 4, 2$.

Problema 15

Maria convidou nove garotos e nove garotas para sua festa de aniversário. Ela preparou camisetas com os números de 1 a 18, ficou com a de número 1 e distribuiu as demais para seus convidados. Durante uma dança, ela observou que a soma dos números de cada casal era um quadrado perfeito. Quais pares estavam dançando?

Problema 16

(a) Mostre que os números de 1 a 16 podem ser escritos numa reta, de tal modo que a soma de quaisquer dois números adjacentes seja um quadrado perfeito.

(b) Mostre que os números de 1 a 16 não podem ser escritos ao redor de uma circunferência, de tal modo que a soma de quaisquer dois números adjacentes seja um quadrado perfeito.

Problema 17

Existem 30 cidades em um país. Cada uma delas é conectada a cada uma das outras por uma estrada. Qual é o número máximo de estradas que pdem ser fechadas de modo que ainda seja possível viajar de uma cidade a qualquer outra?

Problema 18

Existem 100 cidades em um país, e algumas delas são ligadas por linhas aéreas. Sabe-se que é possível viajar de uma cidade a qualquer outra (talvez com várias conexões). Prove que você pode viajar pelo país e visitar todas as cidades fazendo não mais que
(a) 198 vôos;
(b) 196 vôos.

Problema 19

(a) Cada uma das arestas de um grafo completo de 6 vértices é colorida de azul ou vermelho. Prove que existe um triângulo monocromático.
(b) Cada um dos vértices de um grafo completo com 17 vértices é colorida com verde, azul ou amarelo. Prove que existe um triângulo monocromático.

Problema 20

Patrícia desenhou em uma folha de papel vários pontos ao redor de uma circunferência. Em seguida traçou alguns segmentos com extremidades nesses pontos. Ao final, observou que em sua figura partiam pelo menos três segmentos de cada ponto e que não existiam triângulos nem quadriláteros com vértices nos pontos desenhados.
Determine o menor número possível de pontos desenhados por Patrícia e uma possível representação dos segmentos traçados.

Problema 21

Um cubo $3 \times 3 \times 3$ de queijo é dividido em 27 cubinhos $1 \times 1 \times 1$. Um rato come um cubinho de queijo por dia e no dia seguinte ele come um cubinho adjacente. É possível que o rato coma o cubinho do centro no último dia?