Probabilidade Aplicada à Teoria dos Grafos

1. Introdução

Muitas vezes, queremos demonstrar a existência de grafos com uma certa propriedade. Mas nem sempre conseguimos construir explicitamente um grafo com a propriedade desejada. Neste caso recorremos a teoremas que demonstram somente a existência e que auxiliam na construção (ainda que indireta) de grafos, como, por exemplo, o princípio das casas dos pombos. Relembremos esse princípio com um dos problemas mais conhecidos da Teoria dos Grafos:

Exemplo 1.1.

Mostre que para todo k inteiro positivo existe um inteiro positivo N tal que, se pintarmos cada aresta de um grafo completo de N vértices de vermelho ou azul, garantimos sempre a existência de um subgrafo completo com k e arestas pintadas todas de uma mesma cor.

(Para quem não está familiarizado com a Teoria dos Grafos, podemos reescrever o problema desta forma: *mostre que para todo k inteiro positivo existe N inteiro positivo de modo que em qualquer festa com N pessoas existam k pessoas tais que todos conhecem todos ou ninguém conhece ninguém – ou mesmo ambos*)

O menor valor de N é conhecido como $R(k)$ ou $R(k,k)$ (números de Ramsey). Por simplicidade, adotaremos a primeira notação.

Resolução

Mostraremos que $R(k) \leq 2^{2k}$. Assim, basta provarmos que para $N = 2^{2k}$ garantimos a existência de pelo menos um grafo completo com k vértices com todas as arestas com a mesma cor.

Considere um grafo completo G com 2^{2k} vértices. Vamos numerá-los com valores inteiros de 1 a 2^{2k}. Seja $x_1 = 1$ um vértice de G. Como este vértice está ligado a outros $2^{2k} - 1$, existem pelo menos $\lceil \frac{2^{2k}-1}{2} \rceil = 2^{2k-1}$ arestas partindo de x_1 com a mesma cor. Seja A_1 o conjunto de vértices de G ligados a x_1 por essas arestas. Agora, seja x_2 o menor elemento de A_1 (lembre-se de que x_2 é um número!). Como x_2 está ligado a pelo menos $2^{2k-1} - 1$ vértices de A_1 então existem pelo menos $\lceil \frac{2^{2k-1}-1}{2} \rceil = 2^{2k-2}$ arestas de mesma cor ligando x_2 a vértices de A_1. Seja A_2 o conjunto desses vértices. Continuando o processo, determinamos uma seqüência de vértices $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{2k}$ e uma seqüência de conjuntos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_{2k}$ com $x_i \in A_{i-1}$. Todas as arestas ligando x_i a vértices de A_i têm a mesma cor.

Podemos associar a cada vértice x_i à cor que liga x_i aos vértices de A_i. Portanto, dentre os $2k$ x_i's existem k associados a uma mesma cor, digamos, $x_{i_1} < x_{i_2} < \cdots < x_{i_k}$ associados à cor azul. Veja que a aresta $x_{i_1}x_{i_j}$, $j > 1$, tem sempre cor azul (pois $x_{i_j} \in A_{i_1}$); a aresta $x_{i_2}x_{i_j}$, $j > 2$, também tem sempre cor azul; e assim por diante. Assim, o grafo completo com vértices $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ só tem arestas azuis. ∎

Mas nem sempre o princípio das casas dos pombos funciona. Apresentaremos aqui o *método probabilístico*. Mas antes estudemos probabilidades.

2. Probabilidades

2.1. A função probabilidade

O conceito de probabilidade é utilizado para estudar experimentos em geral aleatórios. O que vamos mostrar aqui é o modelo de probabilidade.

Para representar matematicamente um experimento, utilizamos um conjunto S denominado *espaço amostral*. Deste modo, os resultados dos experimentos são representados por subconjuntos de S. Tais subconjuntos são chamados *eventos*. Seja $\mathcal{P}(S)$ o conjunto das partes de S (ou seja, o conjunto dos subconjuntos de S). Definimos a *função probabilidade* como $P\colon \mathcal{P}(S) \to R_+$ que satisfaz as propriedades:

(i) $P(\emptyset) = 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

O que isso tem a ver com o conceito "conhecido" de probabilidade? Tudo! A probabilidade de um evento representa, grosso modo, a fração de vezes que o evento ocorre quando repetimos o experimento estudado várias vezes. A definição dada aqui só formaliza isso. A definição $P(E) = n(E)/n(S)$ é válida só para espaços amostrais equiprováveis, isto é, tais que a probabilidade de cada subconjunto unitário de S é constante.

Daqui por diante, nos preocuparemos somente com espaços amostrais finitos.

2.2. Valor esperado

Agora, consideremos um experimento que fornece um número X como resultado. Estamos interessados em saber a média dos números obtidos quando repetimos o experimento muitas vezes. Tal média é chamada *valor esperado de* X. Como o valor $X = a$ ocorre na fração $P(X = a)$ dos experimentos, o valor esperado de X pode ser dado por

$$E(X) = \sum_{a \in A} P(X = a) \cdot a$$

onde A é o conjunto de todos os valores que X pode assumir.

Exemplo 2.1.

Mostre a *desigualdade de Markov*:

Seja X uma variável relacionada a um evento e seja A o conjunto dos possíveis valores de X. Mostre que

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Resolução

Considere a função

$$I_{X \geq a} = \begin{cases} 1, & \text{se } X \geq a \\ 0, & \text{se } X < a \end{cases}$$

Para cada $X \in A$ temos

$$\begin{aligned} X \geq aI_{X \geq a} &\iff P(X) \cdot X \geq aI_{X \geq a} \cdot P(X) \\ &\implies \sum_{X \in A} P(X) \cdot X \geq a \sum_{X \in A} I_{X \geq a} \cdot P(X) \\ &\iff E(X) \geq a \sum_{X \geq a} P(X) \\ &\iff P(X \geq a) \leq \frac{E(x)}{a} \end{aligned}$$

∎

Exercícios

01. Um homem vai pescar em uma represa (cheia de peixes!) e afirma que pára de pescar se, e somente se, o último peixe pegado tem massa menor que o anterior. Mostre que o valor esperado de peixes que o pescador vai pegar é $e \approx 2{,}71828\ldots$.

02. Considere um experimento que gera um número inteiro entre 0 e n.

(a) Mostre que se o valor esperado deste número é menor que 1, então a probabilidade do número ser 0 é maior que zero, isto é, é possível que o número seja 0.

(b) Seja K um conjunto de alguns números inteiros entre 0 e n. Mostre que se

$$E(K) = \sum_{k \in K} P(X = k) \cdot k \leq a$$

então $P(\overline{K}) \geq 1 - a$. ($\overline{K}$ é o complementar de K em relação ao conjunto universo, que no caso é o espaço amostral dos números inteiros entre 0 e n).

(Vamos usar estes resultados mais tarde!)

03. Mostre que num experimento é possível que obtenhamos um valor maior ou igual que o valor esperado (é claro que o mesmo resultado vale se trocarmos "maior ou igual" por "menor ou igual").

3. Aplicando probabilidades à Teoria dos Grafos

Como já mencionamos no início, não precisamos construir algo para demonstrar sua existência. Podemos fazer isso provando que a probabilidade de ocorrer essa existência é maior que 0 (quando o espaço amostral é finito, isso basta para demonstrar que algo existe).

Exemplo 3.1.

Um torneio de tênis com n participantes (onde todos jogam uma única vez contra todos) tem a propriedade S_k se, para todo conjunto X de k participantes do torneio, existe um participante não pertencente a X que venceu todos os participantes de X. Mostre que para cada k existe um torneio com a propriedade S_k.

Resolução

Estimaremos a probabilidade $P(n)$ de um torneio com n participantes **não** ter a propriedade S_k e mostraremos que existe n tal que $P(n) < 1$ (de modo que a probabilidade de o torneio ter S_k é $1 - P(n) > 0$).

Tomemos um torneio em que a probabilidade de cada tenista vencer cada jogo é $1/2$. Fixemos um conjunto X com k participantes. Este conjunto "estraga" o torneio se todos os $n - k$ demais participantes perde de pelo um participante de X. A probabilidade de isso acontecer é $(1 - (\frac{1}{2})^k)^{n-k}$ (por quê?). Como existem $\binom{n}{k}$ conjuntos X's, a probabilidade de um ou mais deles "estragar" o torneio é menor ou igual a $\binom{n}{k}(1 - (\frac{1}{2})^k)^{n-k}$ (ou um estraga ou outro estraga ou...). Logo

$$P(n) < \binom{n}{k}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^{n-k} \iff 1 - P(n) > 1 - \binom{n}{k}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^{n-k}$$

Deste modo, basta

$$1 - \binom{n}{k}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^{n-k} > 0 \iff \binom{n}{k}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^{n-k} < 1$$

Seja $f(m) = \binom{m}{k}(1 - (\frac{1}{2})^k)^{m-k}$. Temos

$$\frac{f(m+1)}{f(m)} = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \cdot \frac{m+1}{m+1-k} = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{k}{m+1}}$$

Como

$$\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{k}{m+1}} < 1 \iff m > k \cdot 2^k - 1,$$

então $\frac{f(m+1)}{f(m)} < 1$ para $m > k \cdot 2^k - 1$, o que implica

$$f(m) < a \cdot c^m, \text{ onde } a = \frac{f(k \cdot 2^k - 1)}{c^{k \cdot 2^k - 1}}$$

Assim, sendo a e c constantes com $0 < c < 1$, e c^m arbitrariamente próximo de 0 quando m é suficientemente grande, temos que existe n tal que $f(n) < 1$. ∎

Às vezes precisamos usar o valor esperado e o resultado do exercício 02.

Você se lembra dos números de Ramsey? Já provamos que $R(k) \le 2^{2k}$. Será que conseguimos um limite inferior para $R(k)$? A resposta é sim! A demonstração que apresentaremos a seguir foi obtida por Erdős em 1947.

Exemplo 3.2.

Mostre que $R(k) > \frac{k}{e\sqrt{2}} \cdot 2^{k/2}$.

Resolução

Pintemos cada aresta de um grafo completo G de n vértices de azul ou vermelho aleatoriamente, com probabilidade $1/2$ para cada cor. Calculemos o número esperado de grafos completos de k vértices com arestas todas azuis.

Fixe k vértices de G. A probabilidade de o grafo completo com esses k vértices conter somente arestas azuis é $2^{-\frac{1}{2}k(k-1)}$ (ele tem $\binom{k}{2} = \frac{1}{2}k(k-1)$ arestas!). Como há $\binom{n}{k}$ escolhas dos k vértices, o valor esperado desejado é $\binom{n}{k} \cdot 2^{-\frac{1}{2}k(k-1)}$. Claramente, este também é o número esperado de grafos completos de k vértices e arestas todas vermelhas. Assim, o valor esperado de grafos completos com arestas todas de mesma cor é $E(n) = 2\binom{n}{k} \cdot 2^{-\frac{1}{2}k(k-1)}$.

A aproximação de Stirling $k! \approx k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}$ implica

$$k! \ge 2\sqrt{k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \iff \frac{1}{k!} \le \frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\frac{e}{k}\right)^k$$

Como $n(n-1)\ldots(n-k+1) \le n^k$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \le \frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\frac{ne}{k}\right)^k$$

Logo

$$E(n) \le 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\frac{ne}{k}\right)^k 2^{-\frac{1}{2}k(k-1)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{ne}{k}\right)^k 2^{-\frac{1}{2}k(k-1)}$$

Fazendo $n = \frac{k}{e} \cdot 2^x$, temos

$$E(n) \le \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot 2^{xk} \cdot 2^{-\frac{1}{2}k(k-1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot 2^{xk - \frac{1}{2}k(k-1)}$$

O valor $2^{xk-\frac{1}{2}k(k-1)}$ é menor ou igual a 1 se, e somente se,

$$xk - \frac{1}{2}k(k-1) \le 0 \iff x \le \frac{k-1}{2}$$

Enfim, se $n = \frac{k}{e} \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} = \frac{k}{e\sqrt{2}} \cdot 2^{k/2}$, então

$$E(n) \le \frac{1}{\sqrt{k}} < 1$$

Assim, pelo resultado do exercício 02, item (a), a probabilidade de haver um grafo com nenhum subgrafo completo com arestas de mesma cor é maior que zero, ou seja, para $n = \frac{k}{e\sqrt{2}} \cdot 2^{k/2}$ existe um grafo completo de n vértices sem subgrafos completos de k vértices com arestas de uma mesma cor. Conseqüentemente, $R(k) > \frac{k}{e\sqrt{2}} \cdot 2^{k/2}$. ∎

Assim, temos $\frac{k}{e\sqrt{2}} \cdot 2^{k/2} < R(k) \le 2^{2k}$. Observando as demonstrações destes fatos (que são relativamente simples), podemos pensar se já existem desigualdades mais fortes. De certo modo esses são os melhores valores encontrados, pois ainda não se sabe se existem valores a e b tais que $a > \sqrt{2}$ e $R(k) > a^k$ para todos os valores suficientemente grandes de k ou $b < 4$ e $R(k) \le b^k$ para todos os valores suficientemente grandes de k.

Exercícios

04. Considere um torneio de tênis com n jogadores, como o do exemplo 3.1. Um *caminho hamiltoniano* do torneio é uma seqüência de n jogadores distintos $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tais que i_1 vence i_2, i_2 vence i_3, $\ldots$, i_{n-1} vence i_n. Mostre que existe um torneio com pelo menos $n!/2^{n-1}$ caminhos hamiltonianos.

(*Observação*: Este resultado, obtido em 1943 por T. Szele, é considerado por muitos o primeiro resultado combinatório provado com o método probabilístico.)

05. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_r$ subconjuntos de $A = \{1; 2; 3; \ldots; n\}$. Colorimos cada elemento de A de azul ou vermelho. Mostre que podemos pintar os elementos de modo que no máximo $\sum_{i=1}^{r} (\frac{1}{2})^{n(A_i)-1}$ dos subconjuntos tenha todos os elementos de mesma cor.

06. Prove que é possível pintar cada um dos números $1, 2, 3, \ldots, n$ de vermelho ou azul de modo que não exista uma progressão aritmética com k elementos pintados da mesma cor quando $n < 2^{k/2}$.

3.1. Método probabilístico e construções

Nem sempre o método probabilístico dá conta sozinho de certos problemas de grafos. Muitas vezes provamos que um certo grafo que não tem a propriedade desejada mas é útil existe e depois construímos, a partir desse grafo, um outro com a propriedade desejada.

O seguinte problema também foi resolvido por Erdős, porém em 1959. Definimos o *número cromático* de um grafo como o menor número de cores necessárias para pintar os vértices do grafo de modo que não haja dois vértices de mesma cor ligados por uma aresta (sim, isto tem a ver com o teorema das quatro cores!). A *cintura* de um grafo é o número mínimo de vértices dos ciclos contidos no grafo.

Exemplo 3.3.

Mostre que existe um grafo com número cromático χ e cintura g, $\chi, g \in Z$, $\chi \ge 4$, $g \ge 4$.

Antes de resolver o problema, encorajamos o leitor a tentar construir um grafo de número cromático 4 e cintura 4.

Resolução

Observemos que um grafo G desejado deve ter duas propriedades:

(i) Ter cintura $\ge g$.

(ii) Ter número cromático $\ge \chi$;

Mostraremos que existe um grafo com no máximo $\chi^{3g} + g$ vértices que tem ambas as propriedades.

Seja $n = \chi^{3g}$. Colocaremos arestas no grafo aleatoriamente, sendo que ligamos cada dois vértices com probabilidade p (escolheremos um valor adequado para p mais tarde). O espaço amostral desses grafos é denotado por $\mathcal{G}(n; p)$.

Primeiro mostraremos como construir um grafo com a propriedade (i). Vamos estimar o número esperado de ciclos com no máximo $g - 1$ vértices. Fixe $\ell \ge 3$ vértices. Temos $(\ell - 1)!$ maneiras de ordená-los em ciclo. Porém estamos contando ciclos no sentido horário e anti-horário, assim devemos dividir o resultado por dois, obtendo $(\ell-1)!/2$ ciclos nestes vértices, com probabilidade p^ℓ cada (p para cada uma das ℓ arestas do ciclo). Logo, como há $\binom{n}{\ell}$ maneiras de escolhermos os vértices, o número esperado de ciclos com ℓ vértices quando consideramos todos os grafos de $\mathcal{G}(n;p)$ é

$$E(C_\ell) = \binom{n}{\ell}\frac{(\ell-1)!}{2}p^\ell = \frac{n(n-1)\ldots(n-\ell+1)}{2\ell}p^\ell \leq \frac{(np)^\ell}{2\ell}$$

Logo o número esperado de ciclos com no máximo $g-1$ vértices é

$$\sum_{\ell=3}^{g-1} E(C_\ell) \leq \sum_{\ell=3}^{g-1} \frac{(np)^\ell}{2\ell} \leq \sum_{\ell=3}^{g-1} \frac{(np)^\ell}{6} = \frac{1}{6}\cdot\frac{(np)^g-1}{np-1} \leq \frac{(np)^{g-1}}{3},$$

quando $np \geq 2$, ou seja, $p \geq 2/\chi^{3g}$ (para isto, basta tomar um valor adequado para p – ele não precisa ser $1/2$ sempre!)

Seja $h = (np)^{g-1}$. Seja H o conjunto de grafos com no máximo h ciclos "curtos" (isto é, com no máximo $g-1$ vértices). Mostraremos que $P(H) \geq 2/3$. Assim, podemos obter um grafo com cintura g tirando h arestas de um grafo de H, um de cada ciclo.

Usaremos o fato provado no exemplo 2.1. Veja que $P(X \leq a) = 1 - P(X > a) \geq 1 - E(X)/a$. Portanto

$$P(H) = P\left(\sum_{\ell=3}^{g-1} C_\ell \leq h\right) \geq 1 - \frac{E\left(\sum_{\ell=3}^{g-1} C_\ell\right)}{h} = 1 - \frac{\sum_{\ell=3}^{g-1} E(C_\ell)}{h} \geq 1 - \frac{h/3}{h} = \frac{2}{3}$$

Agora mostraremos que existe um número suficientemente grande de grafos com a propriedade (ii) (sem esquecer os grafos construídos com a propriedade (i)).

Como podemos mostrar que um grafo tem número cromático χ? Uma maneira é pensar no seguinte: considere todos os vértices de uma cor. Então não podemos ter arestas ligando quaisquer dois destes vértices. A este conjunto de vértices chamamos *conjunto independente*. Assim, o número cromático de um grafo G é o menor número de conjuntos independentes que podem ser obtidos de uma partição do conjunto de vértices de G. Note que, sendo t o número de elementos do maior conjunto independente, temos $\chi \cdot t \geq n \iff t \geq n/\chi \iff \chi \geq n/t$.

Assim, sendo $t = n/\chi$, basta encontrarmos um grafo que não tenha conjuntos independentes com $t+1$ vértices. Um conjunto fixado não é independente se houver pelo menos uma aresta ligando seus elementos.

Lembremos que para obter um grafo com cintura $\geq g$ tiramos h arestas. Assim, precisamos obter grafos cujo número cromático se mantenha mesmo depois de tirarmos deles h arestas quaisquer, ou seja, na verdade para cada conjunto deve haver mais de h arestas ligando seus elementos. Seja então I o conjunto de grafos com essa propriedade, ou seja, o conjunto de grafos de $\mathcal{G}(n;p)$ tais que qualquer subgrafo de $t+1$ vértices contém mais de h arestas. Mostraremos que $P(I) \geq 2/3$ para algum valor adequado de p. Note que se provarmos isso teremos $P(H \cap I) = P(H) + P(I) - P(H \cup I) \geq 2/3 + 2/3 - 1 = 1/3$ (lembre que $P(A) \leq 1$ sempre!).

Para variar, fixe um subgrafo de $t+1$ vértices. Seja $T = \binom{t+1}{2}$. Podemos escolher $\binom{T}{j}$ arestas, portanto a probabilidade de este subgrafo conter exatamente j arestas é

$$\binom{T}{j}p^j(1-p)^{T-j}$$

Conseqüentemente, a probabilidade de este subgrafo conter h ou menos arestas é

$$\sum_{j=0}^{h}\binom{T}{j}p^j(1-p)^{T-j}$$

Como temos $\binom{n}{t+1}$ subgrafos com $t+1$ vértices, o valor esperado de subgrafos **não** pertencentes a I é

$$E(\overline{I}) = \binom{n}{t+1} \sum_{j=0}^{h} \binom{T}{j} p^j (1-p)^{T-j}$$

Mostraremos que $E(\overline{I}) < 1/3$ e portanto, usando o resultado do exercício 02, item (b), teremos $P(I) > 2/3$. Vamos lá!!

Primeiro eliminaremos o somatório. A razão entre dois termos consecutivos é

$$\frac{\binom{T}{j+1} p^{j+1} (1-p)^{T-j-1}}{\binom{T}{j} p^j (1-p)^{T-j}} = \frac{T-j}{j+1} \frac{p}{1-p} \geq \frac{T}{h} \frac{p}{1-p}$$

Se esta razão é sempre maior ou igual a 1, podemos escrever

$$\sum_{j=0}^{h} \binom{T}{j} p^j (1-p)^{T-j} \leq (h+1) \binom{T}{h} p^h (1-p)^{T-h} \qquad (*)$$

Como $h = (np)^{g-1} = (\chi^{3g} p)^{g-1}$ e $T = \frac{1}{2} t(t+1)$, com $t = n/\chi = \chi^{3g-1}$, temos que a razão é maior ou igual a 1 se, e somente se,

$$\frac{\frac{1}{2}(\chi^{3g-1}+1)\chi^{3g-1}}{(\chi^{3g}p)^{g-1}} \frac{p}{1-p} \geq 1 \iff p^{g-2}(1-p) \leq \frac{\chi^{3g-1}+1}{2\chi^{3g^2-6g+1}}$$

Como

$$p^{g-2}(1-p) \leq p^{g-2} \text{ e } \frac{\chi^{3g-1}+1}{2\chi^{3g^2-6g+1}} > \frac{\chi^{3g-1}}{\chi^{3g^2-6g+2}} = \chi^{-3g^2+9g-3},$$

basta termos

$$p^{g-2} \leq \chi^{-3g^2+9g-3} \iff p \leq \chi^{\frac{-3g^2+9g-3}{g-2}}$$

Logo, lembrando ainda que $p \geq 2\chi^{-3g}$, temos

$$2\chi^{-3g} \leq p \leq \chi^{\frac{-3g^2+9g-3}{g-2}}$$

Sendo $\frac{-3g^2+9g-3}{g-2} = \frac{-3g^2+9g-6+3}{g-2} = -3g+3+\frac{3}{g-2}$ um pouco maior que $-3g+3$, podemos tomar p tal que

$$2\chi^{-3g} \leq p \leq \chi^{-3g+3}$$

Escolhamos $p = 2k^{-3g+2}$.

Agora, voltemos a $E(\overline{I})$. Utilizando $(*)$ e o resultado $\binom{n}{k} \leq (en/k)^k$, temos

$$E(\overline{I}) \leq \binom{n}{t+1}(h+1)\binom{T}{h} p^h (1-p)^{T-h} \leq \left(\frac{en}{t+1}\right)^{t+1} (h+1) \left(\frac{eT}{h}\right)^h p^h (1-p)^{T-h}$$

Tiremos o $(1-p)$. Como $1-p \leq e^{-p}$, temos

$$E(\overline{I}) \leq \left(\frac{en}{t+1}\right)^{t+1} (h+1) \left(\frac{eTp}{h}\right)^h e^{-p(T-h)}$$

Agora, substituímos $t = n/\chi = \chi^{3g-1}$, $p = 2\chi^{-3g+2}$ e $h = (np)^{g-1} = (2\chi^2)^{g-1}$. Veja que $ph = (2/\chi)^g$ e $pT = \frac{1}{2}\chi^{3g-1}(\frac{n}{\chi}+1)2\chi^{-3g+2} = n + \chi$.

$$
\begin{aligned}
E(\overline{I}) &\leq \left(\frac{en}{\frac{n}{\chi}+1}\right)^{t+1} (h+1)\left(\frac{e\chi^{3g-1}(\chi^{3g-1}+1)2\chi^{-3g+2}}{2\cdot 2^{g-1}\chi^{2g-2}}\right)^h e^{-p(T-h)} \\
&< (e\chi)^{t+1}(h+1)\left(\frac{e(\chi^{g+2}+\chi^{3-2g})}{2^{g-1}}\right)^h e^{-n-\chi}e^{(2/\chi)^g}
\end{aligned}
$$

Agora vamos sumir com $(h+1)e^{(2/\chi)^g}$. Temos $\chi \geq 4$, $g \geq 4$ e $h \geq (2\cdot 4^2)^{4-1} > 3$, logo

$$
(h+1)e^{(2/\chi)^g} \leq (h+1)e^{(2/4)^g} \leq (h+1)e^{(1/2)^4} < (h+1)4^{1/16} < (h+1)2 \leq 2^h
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
E(\overline{I}) &< (e\chi)^{t+1}\left(\frac{2e(\chi^{g+2}+\chi^{3-2g})}{2^{g-1}}\right)^h e^{-n-\chi} \\
&< (e\chi)^{t+1}\left(\frac{\frac{3}{2}e\chi^{g+2}}{2^{g-1}}\right)^h e^{-n-\chi} \\
&= (e\chi)^{t+1}\chi^{(g+2)h}\left(\frac{3e}{2^g}\right)^h e^{-n-\chi} \\
&< (e\chi)^{t+1}\chi^{(g+2)h}e^{-n-\chi} \\
&= e^{t+1-n-\chi}\chi^{t+1+(g+2)h} \\
&= \exp\left(t+1-n-\chi+(t+1+(g+2)h)\ln\chi\right)
\end{aligned}
$$

Como $\chi \geq 4 \iff \chi^{1/2} \geq 2$, $h = (2\chi^2)^{g-1} \leq (\chi^{1/2}\cdot\chi^2)^{g-1} = n^{5/6}/\chi^{5/2}$ e $\ln\chi < \chi/2$. Substituindo também $t = n/\chi$ temos

$$
\begin{aligned}
E(\overline{I}) &< \exp\left(t+1-n-\chi+(t+1+(g+2)h)\ln\chi\right) \\
&< \exp\left(\frac{n}{\chi}+1-n-\chi+\left(\frac{n}{\chi}+1+(g+2)\frac{n^{5/6}}{\chi^{5/2}}\right)\frac{\chi}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{n}{\chi}+1-n-\chi+\frac{n}{2}+\frac{\chi}{2}+(g+2)\frac{n^{5/6}}{2\chi^{3/2}}\right)
\end{aligned}
$$

Além disso, para $g \geq 4$, $g+2 \leq 2^g \leq (\chi^{1/2})^g = n^{1/6}$. Deste modo,

$$
\begin{aligned}
E(\overline{I}) &< \exp\left(\frac{n}{\chi}+1-n-\chi+\frac{n}{2}+\frac{\chi}{2}+(g+2)\frac{n^{5/6}}{2\chi^{3/2}}\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{n}{\chi}+1-\frac{n}{2}-\frac{\chi}{2}+n^{1/6}\cdot\frac{n^{5/6}}{2\chi^{3/2}}\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{n}{\chi}+1-\frac{n}{2}-\frac{\chi}{2}+\frac{n}{2\chi^{3/2}}\right)
\end{aligned}
$$

Sendo $\chi \geq 4$ e $n \geq 4^4 > 16$,

$$
\begin{aligned}
E(\overline{I}) &< \exp\left(\frac{n}{4}+1-\frac{n}{2}-\frac{4}{2}+\frac{n}{2\cdot 4^{3/2}}\right) \\
&= e^{-1-\frac{3n}{16}} \\
&< e^{-1-3} \\
&< \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Assim, utilizando o item (b) do exercício 02, temos $P(I) \geq 2/3$ e logo $P(H \cap I) \geq 1/3$. Portanto existe um grafo G com χ^{3g} vértices em $H \cap I$. Logo G tem no máximo h ciclos com um número de vértices não superior a g e seu número cromático é maior ou igual a χ mesmo se tirarmos h arestas quaisquer de G. Conseqüentemente, podemos tirar h arestas de cada um dos ciclos "curtos", obtendo G' com cintura maior ou igual a g e número cromático maior ou igual a χ. Para obter um grafo com número cromático exatamente igual a χ, tome um subgrafo L de G' com número cromático χ (é só escolher χ dos conjuntos independentes associados a G') e para obter um grafo com número cromático χ e cintura exatamente g, junte a L um ciclo de g vértices separados dos demais pintados com duas ou três cores dentre as χ cores de L (obtendo um grafo com no máximo $\chi^{3g} + g$ vértices). ∎

Exercícios

07. Veja que encontramos um grafo de número cromático $\chi \geq 4$ e cintura $g \geq 4$ (e usamos bastante essas desigualdades!). Mas a cintura pode ser igual a 3 e o número cromático ainda pode ser 2 ou 3. Só faltam esses casos para completar o problema! Façamos isso agora.

(a) Para que valores de $g \geq 3$ existe um grafo de número cromático 2 e cintura g?

(b) Mostre como construir um grafo de número cromático 3 e cintura g, $g \geq 3$.

(c) Mostre como construir um grafo de número cromático $\chi \geq 2$ e cintura 3.

08. Seja $2 \leq t \leq n$. Mostre que existe um grafo bipartido n por n com $\lfloor (1 - 1/(t!)^n) n^{2-2/t-1} \rfloor$ arestas e que não contém um grafo bipartido completo t por t.

Observação: um grafo *bipartido* é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser dividido em dois conjuntos de modo que vértices pertencentes a um mesmo conjunto não estejam ligados; se, além disso, dois vértices estão ligados se, e somente se, pertencem a conjuntos diferentes, então o grafo é *bipartido completo*.

4. Referências Bibliográficas

A demonstração do exemplo 1.1. foi extraída do artigo *The Two Cultures of Mathematics*, de W. T. Gowers, que além de conter também uma prova de que $R(k) > 2^{k/2}$ consiste de uma discussão muito interessante sobre o estudo da Matemática.

O problema de Ramsey (com mais detalhes) pode ser encontrado no artigo *O Teorema de Ramsey*, de Carlos Gustavo Tamm de Araújo, publicado na revista Eureka! 6. Lá há um limite superior um pouquinho melhor para $R(k)$: $R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}$.

Tanto Ramsey como o método probabilístico (além de muitos outros fatos da Teoria dos Grafos) podem ser estudados no livro *Graph Theory – An Introductory Course*, de Béla Bollobás.

Mais problemas usando o método probabilístico também podem ser encontrados no livro *Proofs From The Book*, de Martin Aigner e Günter M. Ziegler. Lá também são encontrados demonstrações realmente elegantes de diversos teoremas, não somente de Combinatória.

O exemplo 3.1. foi retirado do livro de problemas *More Mathematical Morsels*, de Ross Honsberger.

Você também pode pesquisar na Internet! Os exemplos 3.2. e 3.3. (com algumas alterações) foram extraídos do site `http://www.srcf.ucam.org/~mdpd2/maths/pc.pdf` (você vai precisar ter um leitor de .pdf como o Acrobat Reader).

Alguns exercícios foram retirados de um excerto (correspondente ao Capítulo 5) do livro *Probability Models For Computer Science*, de Sheldon M. Ross. Esse excerto encontra-se disponível na Internet em `http://www.harcourt-ap.com/books/rosspmcs/8051_Textures_C05.pdf`