Olimpíada Brasileira de Matemática

X semana olímpica – 21 a 28 de janeiro de 2007

Eduardo Poço

Integrais discretas – Níveis III e U

<u>Integral discreta</u>: dizemos que $F(n)$ é integral discreta de $f(n)$ se e somente se:

$$F(n+1)-F(n)=f(n), \text{ para } n \text{ inteiro (a princípio)}$$

Da mesma forma, dizemos que $f(n)$ é a derivada discreta de $F(n)$.

Notação: $\sum^{n} f(n)=F(n)$

Utilidade: conhecida a integral discreta $F(n)$ da função $f(n)$, temos condições de fazer o somatório:

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)=F(b+1)-F(a), \; a \text{ e } b \text{ inteiros}$$

A integral discreta transforma uma soma em soma telescópica.

Sabendo de algumas propriedades, é possível trabalhar dinamicamente com integrais discretas para obter fórmulas novas a partir de outras conhecidas. Aqui, não queremos provar que uma função dada é integral discreta de outra, pois essa verificação é simples. Queremos obter ferramentas que nos possibilitem ACHAR integrais discretas de forma rápida, para no final poder calcular o valor de um somatório que tenha surgido de algum problema. Em alguns casos, é suficiente saber a "cara" da integral discreta (ou seja, se é um polinômio, exponencial etc).

Algumas integrais discretas (o exercício de verificação é simples):

$$\sum^{n} c=cn \qquad\qquad \sum^{n} n.n!=n!$$

$$\sum^{n} q^{n} = \frac{q^{n}}{q-1}$$

$$\sum^{n} \log_{a} n = \log_{a}(n-1)!$$

$$\sum^{n} \operatorname{sen} kn = \frac{-\cos\left(kn - \frac{k}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$\sum^{n} \cos kn = \frac{\operatorname{sen}\left(kn - \frac{k}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$\sum^{n} \operatorname{sen}^{2} n = \frac{n}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2n-1)}{4\operatorname{sen} 1}$$

$$\sum^{n} \cos^{2} n = \frac{n}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2n-1)}{4\operatorname{sen} 1}$$

$$\sum^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$$

$$\sum^{n} \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{n-1}$$

Propriedades

1) Assim como integrais contínuas (as primitivas), existem várias integrais discretas para uma dada função, e todas elas diferem por uma constante.

Exemplo: 2^{n} e $2^{n}+1$ são integrais discretas de $f(n) = 2^{n}$. Verifique pela definição!

2) Integração discreta é uma transformação linear:

$$\sum^{n} [a.f(n) + b.g(n)] = a\sum^{n} f(n) + b\sum^{n} g(n),$$ para constantes *a* e *b*.

A igualdade nos fornece uma integral discreta para a função do lado esquerdo, lembre-se que podemos somar constantes do lado direito e continuar com uma integral discreta.

3) Integral discreta do produto (por partes): sendo $\sum^{n} f(n) = F(n)$ e $\sum^{n} g(n) = G(n)$, então:

$$\sum^{n} F(n)g(n) = F(n)G(n) - \sum^{n} f(n)G(n+1)$$

Exemplo: Calcule $\sum^{n} n \operatorname{sen} n$ e $\sum^{n} n^2 \operatorname{sen} n$, comparando com o cálculo de $\int x \operatorname{sen} x dx$ e $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

4) Sendo $f(x,n)$ uma função das variáveis *x* e *n*, derivável na variável *x*, então:

$$\sum^{n} \frac{\partial}{\partial x} f(x,n) = \frac{\partial}{\partial x} \sum^{n} f(x,n)$$

Podemos usar a própria variável *n*, se a função tiver derivada nessa variável:

$$\sum^{n} \frac{d}{dn} f(n) = \frac{d}{dn} \sum^{n} f(n)$$

Exemplo: Calcule $\sum^{n} n x^n$, com *x* uma constante em relação a *n*.

5) Seguindo um caminho análogo, temos que:

$$\sum^{n} \left(\int f(x,n) dx \right) = \int \left(\sum^{n} f(x,n) \right) dx + Cn$$

Para alguma constante *C*. Essa constante é encontrada através de valores iniciais conhecidos das funções.

Exemplo: Prove que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 + \int_{-1}^{0} \frac{x^n}{x-1} dx$

Aplicação: Soma de potências consecutivas.

Seja a seguinte função:

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + \ldots + n^m$$

Há uma fórmula recursiva em que podemos calcular $S_m(n)$ a partir de valores anteriores (tente prová-la como exercício):

$$(m+1)S_m(n) = (n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} S_k(n)$$

O problema dessa fórmula é a praticidade: precisamos de todas as funções anteriores, e ainda assim faremos um trabalho algébrico grande. Com integrais discretas, conseguimos obter $S_m(n)$ a partir de $S_{m-1}(n)$ apenas com um trabalho aritmético.

Inicialmente, se queremos $S_m(n)$, queremos sua integral discreta $\sum^n n^m$. Usando a propriedade que nos permite trocar a integral discreta com a contínua (escolhendo a própria variável *n* como variável de integração contínua):

$$\sum^n \left(\int n^{m-1} dn \right) = \int \left(\sum^n n^{m-1} \right) dn + Cn$$

A integral contínua pode ser realizada sem problemas:

$$\sum^n \frac{n^m}{m} = \int \left(\sum^n n^{m-1} \right) dn + Cn$$

Renomeando a constante a ser encontrada:

$$\sum^n n^m = m \int \left(\sum^n n^{m-1} \right) dn + Cn$$

Essa constante pode ser encontrada pela diferença entre integrais discretas quando $n = 0$, fornecendo o oposto da soma dos outros coeficientes já obtidos pela integração contínua. Resumindo:

Se $\sum^n n^{m-1} = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n$, então:

$$\sum^n n^m = b_{m+1} n^{m+1} + b_m n^m + \ldots + b_2 n^2 + b_1 n$$

Com $b_k = \frac{m}{k} a_{k-1}$, para $k = 1,2,...,m+1$, e $b_0 = -\sum_{k=1}^{m+1} b_k$.

Alguns valores:

$$\sum^n 1 = n$$

$$\sum^n n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$$\sum^n n^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$\sum^n n^3 = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$\sum^n n^4 = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

Aplicação: Soma de potências multiplicadas por progressão geométrica

Agora procuraremos $\sum^n n^m x^n$, com *x* uma constante em relação a *n*. Observe:

$$\frac{d}{dn}\sum^n n^m x^n = \sum^n \left(mn^{m-1}x^n + n^m x^n \ln x\right) = m\sum^n n^{m-1}x^n + \ln x \sum^n n^m x^n$$

Das formas iniciais de $\sum^n n^m x^n$, encontramos uma função da forma:

$$\sum^n n^{m-1}x^n = x^n\left(a_{m-1}n^{m-1} + a_{m-2}n^{m-2} + ... + a_2 n^2 + a_1 n\right)$$

com as constantes a_k sendo funções de *x*, mas não dependendo de *n*. É natural procurar uma integral discreta com a seguinte forma:

$$\sum^{n} n^m x^n = x^n\left(b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_2 n^2 + b_1 n\right)$$

Essa forma pode ser encontrada, e os coeficientes satisfazem $b_k = \frac{m}{k} a_{k-1}$, $i = 1,2,\ldots,m$ e $b_0 = \frac{x}{1-x}\sum_{k=1}^{m} b_k$.

Alguns valores:

$$\sum^{n} n x^n = \frac{(n-1)x^{n+1} - n x^n}{(x-1)^2} = \frac{x^n}{(x-1)^2}\left[(x-1)n - x\right],\ x \neq 1$$

$$\sum^{n} n 2^n = 2^n (n-2)$$

$$\sum^{n} n^2 2^n = 2^n\left(n^2 - 4n + 6\right)$$

$$\sum^{n} n^3 2^n = 2^n\left(n^3 - 6n^2 + 18n - 26\right)$$

$$\sum^{n} n^4 2^n = 2^n\left(n^4 - 8n^3 + 36n^2 - 104n + 150\right)$$

Problemas

1- Calcule as seguintes integrais discretas:

a) $\sum^{n} n^2 \binom{n}{3}$

b) $\sum^{n} 3^n \binom{n}{2}$

c) $\sum^{n} \frac{1}{(n+2)n!}$

d) $\sum^{n} \binom{n}{2}^2$

e) $\sum^{n} \frac{2^n (n-1)}{(n+1)!}$

f) $\sum^{n} \frac{1}{n^2+n}$

g) $\sum^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

h) $\sum^{n} \frac{1}{\cos n \cos(n+1)}$

2- Calcule: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen}^2 k}{n}$

3- Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^4 . 2^k}{\sum_{k=1}^{n} k^3 . 2^n}$

4- Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^m - \frac{n^{m+1}}{m+1}}{n^m}$, com m inteiro positivo.

5- Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n)^2} h_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, sendo $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

6- Ache a derivada (contínua) da função gama $\Gamma(n)$ para *n* inteiro positivo, sabendo que $\Gamma'(1) = -\gamma$, a constante de Euler (um valor conhecido) e $\Gamma(1) = 1$. A função gama satisfaz $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo *x* real, assim $\Gamma(n) = (n-1)!$ para *n* inteiro positivo.

7- (OBM2002) O diâmetro de um conjunto $S \subset R$ é definido como sendo $D(S) = \max(S) - \min(S)$. O conjunto vazio, por definição, tem diâmetro igual a zero. Calcule a soma dos diâmetros de todos os subconjuntos de $A = \{1,2,3,\ldots,n\}$, em função de *n*.

Referências:

[1] Uma referência sobre somatórios e algumas considerações históricas sobre o raciocínio humano e implementação de algoritmos em computadores: "A=B", Marko Petkovsek, Herbert S. Wilf, Doron Zeilberger.