

Semana Olímpica 2014

Nível 1: Jogando e Ganhando.

Régis Prado Barbosa

Nesta aula, vamos ver alguns jogos, buscando responder perguntas: “Quem sempre pode ganhar?”, “Quem possui estratégia vencedora?” ou “Como jogar para ganhar?”

Problemas

1. Temos 100 pedras numa mesa. Arnaldo e Beraldo jogam alternadamente retirando pedras da mesa. Cada um pode tirar no máximo 9 pedras e no mínimo 1 pedra. Ganha quem pega a última pedra e o primeiro a jogar é Arnaldo. Quem possui estratégia vencedora?

2. Consideremos que na mesa tem n pedras. Dois jogadores jogam alternadamente retirando entre uma e k pedras. Ganha quem retira a última pedra. Dê condições para o n , de modo que o primeiro tenha estratégia vencedora. Agora em que condições do n o segundo tem estratégia vencedora?

3. Vamos mudar mais ainda o jogo. Suponha que há 100 pedras e cada jogador pode tirar um número entre $\{1,2,4,8,16,32,64\}$ de pedras. Arnaldo e Beraldo jogam alternadamente, mas Beraldo está cansado de ser o segundo a jogar e decide jogar primeiro. Ganha quem retira a última pedra. Quem possui estratégia vencedora?

4. Vamos tentar generalizar agora. Suponha que são n pedras na mesa. Em cada jogada, um jogador pode tirar entre $\{1,2,4,8,16,\dots\}$ (potências de 2) pedras. Ganha quem tira a última pedra. Em função de n , dê quem tem estratégia vencedora.

5. Duas pessoas, A e B, jogam o seguinte jogo: eles retiram moedas de uma pilha que contém, inicialmente, 2006 moedas. Os jogadores jogam alternadamente retirando, em cada jogada, de 1 a 7 moedas; e vão guardando as moedas. Se quiser, um jogador pode passar a vez (não retirar nenhuma moeda), mas para isso deve pagar 7 moedas das que retirou da pilha. Essas moedas são destruídas e não influenciam mais no jogo. Ganha quem retira a última moeda e A começa o jogo. Determinar qual jogador pode assegurar a vitória, não importando como jogue o outro. Mostrar a estratégia vencedora.

6. a) Uma torre está na casa inferior esquerda de um tabuleiro de xadrez 8×8 . Dois jogadores vão disputar um jogo. Alternadamente, eles movem a torre quantas casas quiserem de duas maneiras possíveis: horizontalmente para a direita ou verticalmente para cima. Ganha quem atingir primeiro a casa superior direita. Quem tem a estratégia vencedora, o primeiro ou o segundo jogador?

b) Se em vez de uma torre, for um rei?

7. São dadas $2n$ cartas com números. Elas são colocadas em fila com as faces numeradas expostas. Um jogo consiste de dois jogadores irem pegando uma carta em uma das pontas da fila. Ganha quem conseguir maior soma das cartas ao fim do jogo. Prove que o primeiro jogador pode assegurar pelo menos o empate, não importando como as cartas são dispostas

8. Começando com $n=2$. Dois jogadores A e B jogam alternadamente somando divisores próprios de n (divisores menores que n) ao n atual. O vencedor é o jogador que ao fazer sua jogada deixar um número maior que 1990. Sabendo que A começa, quem pode sempre vencer?

9. João e Maria jogam um jogo num tabuleiro de xadrez. João coloca um rei em alguma casa do tabuleiro. Então Maria move o rei de acordo com os movimentos do xadrez normal. Em seguida, João move também o rei. Porém, o rei só pode ser movido para casas não visitadas. O jogador que não puder mais jogar perde. Quem possui a estratégia vencedora?

10. João achou o jogo anterior muito sem graça. Segundo ele o jogo fica melhor se o tabuleiro for muito grande, então pensou em jogar em tabuleiros enormes.

a) Se o tabuleiro for 2013×2014 , quem tem estratégia para vencer?

b) Se o tabuleiro for de 2011×2013 , quem pode sempre vencer?

c) Vamos destruir o resto desse problema, se o tabuleiro for $m \times n$, diga em função de m e n , quem possui a estratégia para sempre vencer.

11. Dois jogadores estão jogando um jogo em uma mesa retangular. Alternadamente eles põem sobre a mesa moedas de dez centavos, sem superposição (elas podem ficar um pouco de fora da mesa se não caírem). O perdedor é aquele que não encontrar lugar para sua moeda na mesa. Quem possui a estratégia vencedora?

12. Há duas pilhas de moedas em uma mesa. Dois jogadores jogam alternadamente tirando um número qualquer de pedras de uma das pilhas. Ganha quem tirar a última pedra sobre a mesa.

a) Se uma pilha tem 2014 moedas e a outra tem 2013. Quem pode sempre vencer?

b) Se cada pilha possui 2014 moedas. Quem pode sempre vencer?

13. Dois jogadores jogam um jogo em um tabuleiro $1 \times n$. Na sua vez cada jogador pode pintar um ou dois(vizinhos) quadradinhos vazios . O perdedor é aquele que não conseguir jogar. Você tem o direito de escolher: quer ser o primeiro ou o segundo a jogar?