Dona Bissetriz e seus vários maridos

Prof. Cícero Thiago B. Magalhães

1. A medida do ângulo B de um triângulo ABC é 120^o. Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB, tais que BM é a bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle ACB$. O segmento MK intersecta BC no ponto P. Prove que $\angle APM = 30^o$. (OBM)

2. Sejam AF, BG e CH as bissetrizes de um triângulo ABC que tem ângulo A medindo 120^o. prove que o ângulo GFH mede 90^o. (Leningrado)

3. Em um triângulo ABC a bissetriz do ângulo A intersecta o lado BC no ponto A_1 e o círculo circunscrito no ponto A_2. Os pontos B_1, B_2 e C_1, C_2 são obtidos analogamente. Prove que

$$\frac{A_1A_2}{BA_2 + CA_2} + \frac{B_1B_2}{CB_2 + AB_2} + \frac{C_1C_2}{AC_2 + BC_2} \geq \frac{3}{4}.$$

(Teste de seleção do Brasil para IMO)

4. Seja O o centro do círculo ex - inscrito do triângulo ABC oposto ao vértice A. Seja M o ponto médio de AC e seja P a interseção das retas MO e BC. Prove que se $\angle BAC = 2\angle ACB$, então $AB = BP$. (Bielo - Rússia)

5. Seja I o incentro do triângulo ABC e D o ponto de interseção de AI com o círculo circunscrito de ABC. Sejam E e F os pés das perpendiculares baixadas a partir de I sobre BD e CD, respectivamente. SE $IE + IF = \dfrac{AD}{2}$, determine o ângulo BAC. (Teste de seleção do Brasil para IMO)

6. A circunferência inscrita no triângulo ABC tem o centro O e é tangente aos lados BC, AC e AB nos pontos X, Y e Z, respectivamente. As rectas BO e CO intersectam a recta Y nos pontos P e Q, respectivamente. Demonstrar que se os segmentos XP e XQ têm o mesmo comprimento, então o triângulo ABC é isósceles. (Iberoamericana)

7. Sejam D, E e F os pontos de contato da circunferência inscrita (de centro I) com os lados BC, AC e AB, respectivamente, do triângulo ABC. Prove que que as retas AD, BE e CF são concorrentes. O ponto de concorrência é chamado ponto de *Gergonne*.

8. Sejam D', E' e F' os pontos simétricos de D, E e F, em relação aos respectivos pontos médios dos lados do triângulo. Prove que as retas AD', BE' e CF' são concorrentes. O ponto de concorrência é chamado ponto de *Nagel*.

9. Prove que em todo triângulo, o incentro (I), o baricentro (G) e o ponto de Nagel (N), estão alinhados, e $2 \cdot IG = GN$.

10. Em um triângulo ABC com incentro I, e ex - incentros $J,\ K,\ L$, mostre que I é o ortocentro do triângulo JKL.

11. O prolongamento da bissetriz AL do triângulo acutângulo ABC encontra o círculo circunscrito em N. Por L traçam - se perpendiculares LK e LM aos lados AB e AC, respectivamente. Prove que a área do triângulo ABC é igual à área do quadrilátero $AKNM$. (IMO)

12. Num triângulo ABC tem - se $AB = BC$, e D é um ponto sobre a base AC tal que o raio do círculo inscrito no triângulo ABD é igual ao raio do círculo tangente ao segmento DC e aos prolongamentos das retas BD e BC. Prove que o raio deste círculo é igual a $\dfrac{1}{4}$ da medida h de uma das alturas iguais do triângulo ABC.

13. Seja ABC um triângulo e sejam D e E os pontos médios de BC e AC, respectivamente. Suponha que DE é tangente ao círculo inscrito no triângulo ABC. Prove que $r_c = 2r$, em que r é inraio do triângulo ABC e r_c é o ex - inraio relativo a AB.

14. Seja ABC um triângulo, e sejam $D,\ E,\ F$ pontos sobre os lados $BC,\ CA,\ AB$, respectivamente, tais que os triângulos AEF, BFD, e CDE tem todos o mesmo inraio r. Sejam r_1 e r_2 os inraios relativos aos triângulos DEF e ABC, respectivamente. Mostre que $r + r_1 = r_2$.

15. O círculo inscrito no triângulo ABC toca o lado AB no ponto D, e seja um ponto do lado AC. Prove que os círculos inscritos nos ADE, BCE, e BDE tem uma tangente comum.

16. Seja BD a bissetriz do ângulo B do triângulo ABC. O círculo circunscrito ao triângulo BDC toca AB em E, enquanto o círculo circunscrito ao triângulo ABD toca BC em F. Prove que $AE = CF$. (São Petersburgo)

17. Seja ABC um triângulo acutângulo. As bissetrizes internas relativas aos ângulos B e C tocam os lados opostos nos pontos L e M, respectivamente. Prove que existe um ponto K no interior do lado BC tal que o triângulo KLM é equilátero se, e somente se, $\angle A = 60^o$.

18. Sejam ABC um triângulo, M o pé da bissetriz interna do ângulo A e N o pé da bissetriz interna do ângulo B. Suponha que MN seja bissetriz do ângulo AMC. Calcule a medida do ângulo A.

19. Em um triângulo retângulo ABC ($\angle A = 90^o$), as bissetrizes internas dos ângulos B e C intersectam - se em I e intersectam os lados opostos em D e E, respectivamente. Prove que a área do quadrilátero $BCDE$ é o dobro da área do triângulo BIC.