Teoremas de Ceva e Menelaus
– Nível 2 –

Marcelo Mendes de Oliveira
marcelom@ceara.net

Semana Olímpica – Janeiro/2003 – Goiânia

Introdução

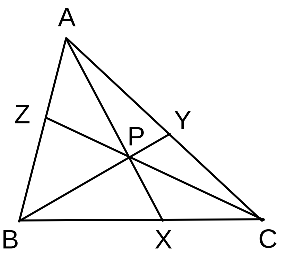
Provas de teoremas envolvendo colinearidade e concorrência normalmente são "pesadas", longas e, conseqüentemente, impopulares. Com a ajuda de dois famosos teoremas, elas podem ser simplificadas.

O primeiro foi descoberto por Menelaus de Alexandria (aproximadamente 100 A.C.). Em 1678, Geovanni Ceva, um matemático italiano, publicou o Teorema de Menelaus e um segundo teorema de sua própria autoria, relacionado com o primeiro. Os problemas nesta lista envolverão o Teorema de Menelaus e o Teorema de Ceva ou ambos. Dentre essas aplicações clássicas estão os teoremas de Gerard Desargues, Blaise Pascal e Pappus de Alexandria. A dica será: usar Teorema de Menelaus para problemas de colinearidade e Teorema de Ceva para concorrência.

Teorema de Ceva

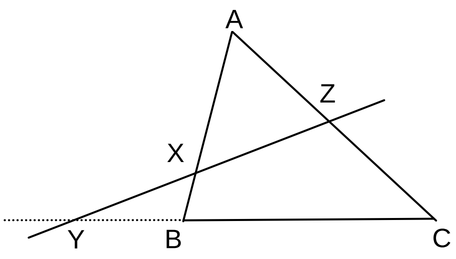
$$\frac{AZ\cdot BX\cdot CY}{BZ\cdot CX\cdot AY}=1$$

$\Leftrightarrow$ AX, BY, CZ são concorrentes.



Teorema de Menelaus

$$\frac{BY}{CY}\cdot\frac{CZ}{AZ}\cdot\frac{AX}{BX}=1\Leftrightarrow \text{X, Y, Z estão alinhados.}$$



Problemas

01. Prove que as bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo não isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo cortam os lados opostos em 3 pontos colineares.

02. Prove que as bissetrizes externas de um triângulo não isósceles cortam os lados opostos em três pontos colineares.

03. No triângulo retângulo ABC, P e Q estão sobre BC e AC, respectivamente, tais que CP=CQ=2. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ, uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S. O prolongamento de PQ corta AB em T. Se a hipotenusa AB=10 e AC=8, encontre TS.

04. Um círculo passando pelos vértices B e C de um ΔABC corta AB em P e AC, em R. Se PR corta BC em Q, prove que $\frac{QC}{QB}=\frac{RC\times AC}{PB\times AB}$.

05. No quadrilátero ABCD, as retas AB e CD se cortam em P, enquanto as retas AD e BC se cortam em Q. As diagonais AC e BD cortam PQ em X e Y. Prove que $\frac{PX}{XQ}=\frac{PY}{YQ}$.

06. No ΔABC, AL, BM, CN são concorrentes em P. Expresse a razão AP/PL em termos dos segmentos gerados pelas retas concorrentes sobre os lados de ABC.

07. O lado AB de um quadrado é prolongado até P tal que BP=2AB. Com M, ponto médio de DC, BM é desenhado cortando AC em Q. PQ corta BC em R. Usando o Teorema de Menelaus, encontre a razão CR/RB.

08. Os lados AB, BC, CD e DA de um quadrilátero são cortados por uma reta nos pontos K, L, M e N, respectivamente. Prove que $\frac{BL}{LC}\cdot\frac{AK}{KB}\cdot\frac{DN}{NA}\cdot\frac{CM}{MD}=1$.

09. (Canadá/1994) Seja ABC um triângulo acutângulo. Seja AD a altura relativa ao lado BC e seja H um ponto qualquer sobre o segmento AD. As retas BH e CH, quando prolongadas, intersectam AC e AB em E e F, respectivamente. Prove que $E\hat{D}H=F\hat{D}H$.

10. (Austrália/1995) As retas unindo os três vértices do ΔABC a um ponto nesse plano corta os lados opostos aos vértices A, B, C nos pontos K, L, M, respectivamente. Uma reta por M paralela a KL corta BC em V e AK em W. Prove que VM=MW.

11. (Tchecoslováquia/1999) Um triângulo ABC é dado. Considere pontos K, L, M no interior dos lados BC, CA, AB, respectivamente, tais que os segmentos AK, BL, CM se intersectam em um ponto U. Prove que se os triângulos AMU e KCU têm área P e os triângulos MBU e CLU têm área Q, então P=Q.

12. (Moldávia/1995) Sobre o lado BC de um triângulo ABC é escolhido um ponto A_1. Sobre o lado AB, entre os pontos A e B, pontos C_1, C_2, C_3 são escolhidos nessa ordem tal que os segmentos CC_1, CC_2, CC_3 dividam o segmento AA_1 em quatro partes iguais. Prove que AC_1 + $C_3B > \frac{AB}{2}$.

13. No ΔABC, as cevianas AD, BE se intersectam em P. Prove que [ABC]·[DPE]= [APB]·[CDE].

Bibliografia

[1] Posamentier, A. et al. Challenging Problems in Geometry. New York, Dover Publications, INC, 1970, 1988.