Semana Olímpica

Prof. Onofre Campos

Métodos Polinomiais para resolver problemas

Neste capítulo, exploraremos técnicas legais para resolver problemas, utilizando-se das propriedades dos polinômios. Iniciemos com um problema do segundo grau.

Exemplo 1. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 10 \end{cases}$$

SOLUÇÃO.O problema pode ser resolvido por substituição. Calculamos o valor de a na primeira equação e substituímos na segunda, etc. Entretanto, uma observação interessante é notar que a e b são as raízes da equação do segundo grau $x^2 - 7x + 10 = 0$. De fato, as raízes desta equação são dois números cuja soma é 7 e cujo produto é 10. Resolvendo esta equação obtemos as raízes 2 e 5. Logo, as soluções do sistema são: $\{(2, 5), (5, 2)\}$.

Exemplo 2. *Se a, b e c são três números distintos e satisfazem as equações:*

$$\begin{cases} a^3 + pa + q = 0 \\ b^3 + pb + q = 0 \\ c^3 + pc + q = 0 \end{cases},$$

calcule $a + b + c$.
SOLUÇÃO.Verificamos que a, b e c satisfazem a equação polinomial:

$$X^3 + pX + q = 0.$$

Logo, a soma das raízes é $a + b + c = 0$, já que o coeficiente de x^2 é nulo.

Exemplo 3. *Fatore $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.*
SOLUÇÃO.Considere o polinômio do terceiro grau

$$P(X) = X^3 - AX^2 + BX - C$$

cujas raízes são a, b e c. Temos:

$$a + b + c = A, \quad ab + bc + ac = B \quad \text{e} \quad abc = C.$$

Substituindo X por a, b e c, obtemos:

$$a^3 - A \cdot a^2 + Ba - C = 0,$$
$$b^3 - A \cdot b^2 + Bb - C = 0,$$
$$c^3 - A \cdot c^2 + Bc - C = 0.$$

Dessa forma, somando as três igualdades, ficamos com:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3C = A(a^2 + b^2 + c^2) - B(a + b + c),$$

ou ainda,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac).$$

Exemplo 4. *Sejam a, b e c três números tais que $a+b+c=0$. Mostre que*

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Solução.Neste exemplo, calcularemos os termos da seqüência $S_n=a^n+b^n+c^n$, para cada inteiro $n\geq 0$. Como no exemplo anterior, consideremos novamente a, b e c as raízes da equação polinomial $X^3-AX^2+BX-C=0$. Multiplicando essa equação por X^n, em que n é qualquer inteiro ≥ 0, obtemos:

$$X^{n+3}-A\cdot X^{n+2}+B\cdot X^{n+1}-C\cdot X^n=0.$$

Agora, substituindo X por a, b e c e somando as equações, ficamos com

$$(a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3})-A\cdot(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2})+B\cdot(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})$$
$$-C\cdot(a^n+b^n+c^n)=0,$$

ou ainda,

$$S_{n+3}-A\cdot S_{n+2}+B\cdot S_{n+1}-C\cdot S_n=0. \tag{1}$$

Temos

$$\begin{cases} a+b+c=A\\ ab+bc+ac=B\\ abc=C\end{cases}$$

Como $a+b+c=0$, então $A=0$, de modo que

$$S_{n+3}=-B\cdot S_{n+1}+C\cdot S_n.$$

Calculando os termos iniciais da seqüência, encontramos

$$S_0=3,\quad S_1=0\quad\text{e}\quad S_2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=-2B.$$

Logo, pela equação (1), vem:

$$\begin{aligned} S_3 &= -B\cdot S_1+C\cdot S_0=3C;\\ S_5 &= -B\cdot S_3+C\cdot S_2=-5BC.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{S_5}{5}=-BC=\frac{S_2}{2}\cdot\frac{S_3}{3},$$

como quéríamos mostrar.

Exercícios Propostos

1. Determine a soma dos quadrados das raízes da equação
$$2x^3-8x^2-60x+k=0.$$
2. Se a, b e c são raízes da equação $x^3-rx+20=0$, onde r é um número real, calcule o valor de $a^3+b^3+c^3$.
3. Encontre todos os valores do parâmetro $a\in\mathbb{R}$ para os quais as raízes x_1, x_2 e x_3 da equação $x^3-6x^2+ax+a=0$ satisfazem a equação
$$(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0.$$
4. (OCM) Sejam a, b, c e d as raízes do polinômio x^4+6x^2+4x+2. Encontre um polinômio $p(x)$, do quarto grau, que tenha como raízes a^2, b^2, c^2 e d^2.
5. (USA - 1973) Ache todos os números complexos x, y, z tais que $x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=3$.
6. As raízes da equação $x^3-x+1=0$ são a, b e c. Calcule $a^8+b^8+c^8$.
7. (USA - 1977) Sejam a, b, c e d as raízes da equação
$$x^4+x^3-1=0.$$
Mostre que o produto de duas dessas raízes é uma raiz da equação $x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$.

8. Sejam a, b e c números reais não nulos tais que

$$(ab+bc+ac)^3 = abc(a+b+c)^3.$$

Mostre que a, b e c são os termos de uma progressão geométrica.

Solução: Considere o polinômo mônico:

$$P(x) = x^3 - mx^2 + nx - p$$

cujas raízes são a, b e c. Então, pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} a+b+c = m \\ ab+bc+ac = n \\ abc = p \end{cases}$$

Pelo enunciado, temos $n^3 = m^3 p$, de modo que, se $m \neq 0$, a equação $P(x) = 0$ pode ser escrita como

$$x^3 - mx^2 + nx - \frac{n^3}{m^3} = 0,$$

ou ainda,

$$m^3x^3 - m^4x^2 + nm^3x - n^3 = 0.$$

Daí, obtemos a seguinte fatorãção:

$$(mx-n)(m^2x^2+mnx+n^2) - m^3x(mx-n) = 0 \Rightarrow (mx-n)(m^2x^2-(m^3-mn)x+n^2) = 0.$$

Segue que uma das raízes do polinômio é $x_1 = \dfrac{n}{m}$ e as outras duas satisfazem $x_2x_3 = \dfrac{n^2}{m^2}$ (usando relações de Girard para a equação quadrática da direita). Daí, obtemos $x_1^2 = x_2x_3$, o que significa que x_1, x_2 e x_3 são os termos de uma P.G.

OBS: Pode-se resolver o problema diretamente escrevendo a fatoração:

$$(ab+bc+ac)^3 - abc(a+b+c)^3 = (a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab).$$

9. Seja a um número irracional e n um inteiro positivo. Prove que

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}$$

é um número irracional.

10. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x^5+y^5 = 33 \\ x+y = 3 \end{cases}$$

11. Encontre todas as soluções reais da equação $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{5-x} = 2$.

12. Qual a relação entre a, b e c para que o sistema

$$\begin{cases} x+y = a \\ x^2+y^2 = b \\ x^3+y^3 = c \end{cases}$$

tenha solução real.

13. Se $x > 0$e $x + \dfrac{1}{x} = 5$, determine o valor de $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$.

14. Sabendo que $ax+by = 2$, $ax^2+by^2 = 20$, $ax^3+by^3 = 56$ e $ax^4+by^4 = 272$, calcule o valor de ax^5+by^5.

15. Suponha que $a+b+c = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = 0$. Mostre que $a^n+b^n+c^n = 0$, para todo inteiro n.

16. Se $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$, determine o valor de $x^4+y^4+z^4$.

17. Mostre que $(a+b)^5-a^5-b^5=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$.

18. Mostre que $(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$.

19. Prove que se $a+b+c=0$, então

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

20. Sejam x, y, z reais não nulos tais que $x+y+z=0$. Determine o valor da expressão

$$\frac{x^5+y^5+z^5}{xyz(xy+yz+zx)}.$$

21. Se a, b e c são reais não nulos que satisfazem $a+b+c=0$, calcule

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)^2(a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2}.$$

22. Sejam x, y, z reais não nulos e tais que

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\cdot$$

Calcule a diferença $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)$.

23. Sejam x, y, z reais não nulos, tais que $x+y+z\neq 0$ e

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Determine o valor de $(x+y)(y+z)(z+x)$.

24. Encontre o quociente da divisão de $a^{64}-b^{64}$ por

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}).$$

25. (a) Seja $n>1$ inteiro e $a, b\in\mathbb{R}$. Prove que

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}).$$

(b) Use o item (a) para provar que o número

$$8^n-3^n-6^n+1^n$$

é múltiplo de 10.

26. (a) Seja $n>1$ um inteiro ímpar e $a, b\in\mathbb{R}$. Prove que

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1}).$$

(b) Use o item (a) para provar que o número

$$1^{99}+2^{99}+3^{99}+4^{99}+5^{99}$$

é um múltiplo de 5.

27. Prove que se x, y e z são racionais distintos então a expressão

$$\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$$

é o quadrado de um número racional.