Semana Olimpica 2010 - Nível 2

Ideias que você deve saber

Samuel Feitosa

1 Combinatória

Problema 1. *(Rússia 2001) Em uma festa, existem $2n+1$ pessoas. Sabemos que para qualquer grupo de n pessoas, existe uma pessoa(fora do grupo) que conhece todos eles. Mostre que existe uma pessoa que conhece todos na festa.*

Problema 2. *(Rússia 2003) Existem n pessoa em uma festa. Após uma segundo, desde o início da festa, uma sirene toca e todos que conhecem 0 pessoas vão embora. Depois de um segundo a sirene toca e todos que conhece 1 pessoa vão embora. Depois de um segundo a sirene toca novamente e todos que conhecem 2 pessoas dentre os restantes na festa vão embora. O processo se repete n vezes. Determine o maior número possível de pessoas que podem restar na festa.*

Problema 3. *(Leningrado) Na Rússia existem n cidades e $2n-1$ estradas de mão única. Cada estrada une duas cidades, além disso é possível ir de uma cidade para qualquer outra através dessas estradas. Demonstre que existe uma estrada pode ser destruida de modo que ainda seja possível ir de uma cidade para qualquer outra.*

Problema 4. *Existem 21 pontos sobre um círculo. Prove que existem pelo menos 100 arcos definidos por esses 21 pontos, cujas medidas em graus são menores ou iguais a $120°$. (Dica: trace uma aresta entre A e B se $\angle AOB > 120°$)*

Problema 5. *(TT 1985) Uma certa classe de 32 alunos é organizada em em 33 clubes de modo que cada clube contém 3 alunos e quaisquer dois clubes não possuem o mesmo conjunto de membros. Prove que existem dois clubes com exatamente um membro em comum.*

Problema 6. *(Bielorússia) Os alunos da OBM aprendem n matérias na semana olímpica. É verdade que para cada matéria exatamente 3 alunos são os melhores nessa matéria, e que para cada 2 matérias, existe exatamente um aluno que é um dos melhores nas duas. Prove que:*

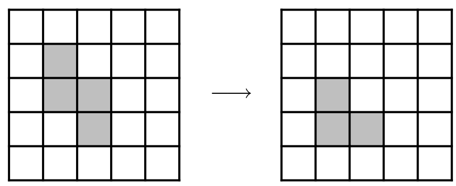
a) Se $n = 8$ existe um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.

b) Se $n = 7$, não é necessário que haja um aluno que é um dos melhores em todas as matérias.

Problema 7. *Considere um tabuleiro $n \times n$ com todas as suas entradas pertencentes ao conjunto $\{0, 1\}$. Se todas as linhas são distintas, mostre que podemos apagar uma coluna de modo que as linhas restantes serão ainda distintas.*

Problema 8. *Existem 2001 cidades em um país e toda cidade está ligada a pelo menos 1600 outras cidades por uma estrada azul. Encontre o maior n para o qual existem n cidades tal que quaisquer duas são ligadas por uma estrada.*

Problema 9. *Suponha que n quadrados de um tabuleiro infinito são coloridos de cinza, e que o os quadrados restantes são coloridos de branco. Em cada passo, um novo tabuleiro de quadrados é obtido baseado no anterior, como segue: Para cada posição no tabuleiro, examine o quadrado da posição, o quadrado imediatamente acima e o quadrado imediatamente à direita. Se existem dois ou três quadrados com a cor cinza entre eles, então no novo tabuleiro essa posição terá a cor cinza, caso contrário ela terá a cor branca. Mostre que após no máximo n passos todos os quadrados terão a cor branca. Apresentamos um exemplo com $n = 4$:*



O primeiro tabuleiro mostra a configuração inicial e o segundo mostra a configuração após um passo.

2 Teoria dos Números

Problema 10. *(Leningrado 1990) Sejam a e b números naturais tais que $b^2 + ba + 1$ divide $a^2 + ab + 1$. Prove que $a = b$.*

Problema 11. *(IMO 1998) Determine todos os pares de inteiros positivos (x, y) tais que $xy^2 + y + 7$ divide $x^2y + x + y$.*

Problema 12. *(IMO 1988) Sejam a e b dois inteiros positivos tais que $ab+1$ divide a^2+b^2. Mostre que $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ é um quadrado perfeito.*

Problema 13. *(IMO 2003) Encontre todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que*

$$\frac{m^2}{2mn^2 - n^3 + 1}$$

é um inteiro positivo.

Problema 14. *(IMO 2007) Sejam a e b inteiros positivos. Mostre que se $4ab - 1$ divide $(4a^2 - 1)^2$, então $a = b$.*

Problema 15. *(Seletiva Rioplatense 2001) Encontre todos os pares (m, n) de números naturais com $m < n$ tais que $m^2 + 1$ é um múltiplo de n e $n^2 + 1$ é um múltiplo de m.*

Problema 16. *(Banco IMO 1984) Sejam m e n inteiros positivos. Mostre que $4mn - m - n$ nunca pode ser um quadrado perfeito.*

Problema 17. *(Seletiva Rioplantense 2007) Ache todos os primos p, q tais que $p^p + q^q + 1$ seja divisível por pq.*

Problema 18. *Mostre que se $k > 1$ então $2^{k-1} \not\equiv -1 \pmod k$*

Problema 19. *(Bulgária 1995) Encontre todos os números primos p e q tais que o número $2^p + 2^q$ é divisível por pq. (Dica: Use o problema anterior)*

Problema 20. *(Bulgária 1996) Ensontre todos os números primos p e q tais que*

$$\frac{(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)}{pq}$$

é um inteiro.

Problema 21. *(Bulgária 1997) Encontre todos os números inteiros $m, n \geq 2$ tais que*

$$\frac{1 + m^{3^n} + m^{2\cdot 3^n}}{n}$$

é um inteiro

Problema 22. *Encontre todos os inteiros positivos n tais que $2^n - 1$ é divisível por 3 e $\frac{2^n - 1}{3}$ tem um múltiplo da forma $4m^2 + 1$ para algum natural m.*

3 Geometria

Problema 23. *(OIM 1987) Seja $ABCD$ um quadrilátero plano convexo, P e Q sao pontos sobre os lados AD e BC tais que*

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{DC} = \frac{BQ}{QC}.$$

Demonstre que o ângulo formado pel reta PQ com as retas AB e CD são iguais.

Problema 24. *(Teste IMO - Brasil) Seja Γ uma circunferência de centro O tangente aos lados AB e AC do triângulo ABC nos pontos E e F. A reta perpendicular ao lado BC por O intercepta EF no ponto D. Mostre que A, D e M(ponto médio de BC) são colineares.*

Problema 25. *(OIM 1996) Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro ω centrado em O. Sejam AD, BE e CF as alturas de ABC. A reta EF corta ω em P e Q.*

a) Prove que $AO \perp PQ$

b) Se M é o ponto médio de BC, provar que

$$AP^2 = 2 \cdot AD \cdot OM$$

Problema 26. *No triângulo ABC, $AB = AC$. D é um ponto sobre o lado BC tal que $BD = 2CD$. Se P é o ponto médio de AD tal que $\angle ABP = \angle PAC$, prove que $2\angle DPC = \angle BAC$.*

Problema 27. *As circunferências G_1 e G_2 se intersectam em dois pontos, A e B. Uma reta por B intersecta G_1 em C e G_2 em D. A reta tangente a G_1 que passa por C corta a reta tangente a G_2 que passa por D em E. A reta simétrica de AE, com respeito a reta AC, corta G_1 em F (além de A). Demostre que BF é tangente a G_2.*

Observação: Considere somente o caso em que C não pertence ao interior de G_2 e D não pertence ao interior de G_1.

Problema 28. *(Torneio das Cidades) No triângulo ABC, AD é a altura relativa ao lado BC e CE é a bissetriz de $\angle ABC$. Sabendo que $\angle BEA = 45°$, encontre o valor do ângulo $\angle EDC$.*

Problema 29. *(Leningrado 1989) Sejam AD, BE e CF as bissetrizes internas do triângulo $\triangle ABC$. Sabendo que $\angle FDE = 90°$, determine o valor do ângulo A.*

Problema 30. *(USAMO 1987) Seja ABC um triângulo. D, E, F são, respectivamente, os pés das bissetrizes de C, B, A aos lados. Se $\angle DGF = 90°$. Calcule os possíveis valores do ângulo A.*

Problema 31. *(URSS) Sejm M, N, P os pontos médios dos arcos $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{AC}$ determinados pelo triângulo ABC em seu circuncírculo, respectivamente. Sejam E e F os pontos de interseção de MN e MP com os lados BC e AC, respectivamente. Mostre que EF passa pelo incentro do triângulo ABC.*

Problema 32. *(IBERO 1989) A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados AC e BC nos pontos M e N, respectivamente. As bissetrizes de A e B interceptam MN nos pontos P e Q, respectivamente. Seja O o incentro do triângulo ABC. Prove que $MP \cdot OA = BC \cdot OQ$*

Problema 33. *(IBERO 1998) A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA, AB nos pontos D, E, F respectivamente. AD corta a circunferência num segundo ponto Q. Demonstre que a reta CQ passa pelo ponto médio de AF se, e somente se, $AC = BC$.*

4 Álgebra

Problema 34. *Entre todos os conjuntos de números reais $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ do intervalo aberto $(0, 1)$ tais que $x_1x_2 \ldots x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{20})$, encontre aquele em que $x_1x_2 \ldots x_{20}$ é máximo.*

Problema 35. *(URSS 1988) A sequência de inteiros a_n é dada por $a_0 = 0$, $a_n = P(a_{n-1})$, onde $P(x)$ é um polinômio cujos coeficientes são inteiros positivos. Mostre que para quaisquer inteiros positivos m, k com máximo divisor comum d, o máximo divisor comum de a_m e a_k é a_d.*

Problema 36. *(Rússia 1963) Resolva em inteiros a equação:*

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3$$