XXIII Olimpíada Brasileira de Matemática

Primeira Fase — Nível Universitário — 1 de Setembro de 2001

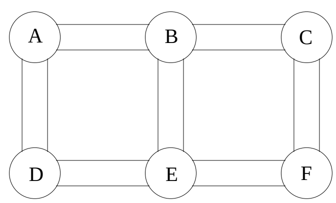
Preencha a folha de rosto e leia atentamente as instruções.

1. Seja $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$. Calcule $f^{(2001)}(0)$. (Denotamos por $f^{(n)}(x)$ a derivada de ordem n no ponto x; assim, $f^{(2)}(x) = f''(x)$.)

2. Seja $s(n)$ a soma dos algarismos de n. Assim, por exemplo, $s(77) = 14$ e $s(2001) = 3$. Diga se existe um inteiro positivo n com $s(n) = 10$ e $s(n^2) = 100$. Se não existir, demonstre este fato. Se existir, dê um exemplo.

3. O centro de massa de uma lata cilíndrica de refrigerante tem a mesma posição quando a lata está vazia ou cheia. Se a massa da lata vazia é m e a massa do refrigerante dentro da lata cheia é M, determine a fração de refrigerante que deve ser deixado na lata para que seu centro de massa fique o mais baixo possível.

4. Um ratinho ocupa inicialmente a gaiola A e é treinado para mudar de gaiola atravessando um túnel sempre que soa um alarme. Cada vez que soa o alarme o ratinho escolhe qualquer um dos túneis incidentes a sua gaiola com igual probabilidade e sem ser afetado por escolhas anteriores. Qual a probabilidade de que após o alarme soar 23 vezes o ratinho ocupe a gaiola B?



5. Seja A uma matriz $n \times n$ com $a_{1,j} = a_{i,1} = 1$ (para quaisquer i e j, $1 \le i, j \le n$) e $a_{i+1,j+1} = a_{i,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j+1}$ (para quaisquer i e j, $1 \le i, j < n$). Assim,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots \\ 1 & 5 & 13 & 25 & \cdots \\ 1 & 7 & 25 & 63 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

   Calcule $\det(A)$.

6. Seja x_n uma seqüência de números reais definida por

$$x_{n+1} = x_n^2 - \frac{x_n}{2}, \qquad n \ge 0.$$

   Para quais valores de x_0 a seqüência converge? Para que valor?