XXIII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível Universitário

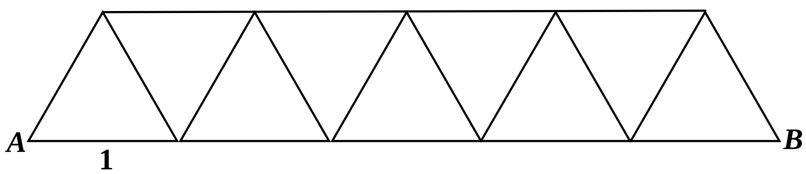
PROBLEMA 1:
São dados um ponto O e uma reta r no plano. Para cada ponto P de r, seja r_p a reta perpendicular a OP passando por P. Prove que o conjunto $\{r_p \mid P \in r\}$ é o conjunto de todas as retas tangentes a uma parábola.

PROBLEMA 2:
Seja£ um número real positivo arbitrário. Com centro em todos os pontos do plano com coordenadas inteiras, traça-se um círculo de raio£. Prove que toda reta passando pela origem intercepta uma infinidade desses círculos.

PROBLEMA 3:
Definimos $SL(2, \mathrm{Z})$ como o conjunto das matrizes 2×2 com coeficientes inteiros e determinante 1. Seja $A \in SL(2, \mathrm{Z})$ uma matriz tal que existe $n > 0$ inteiro com $A^n = \mathrm{I}$.
Prove que existe $X \in SL(2, \mathrm{Z})$ tal que $X^{-1}AX$ é igual a uma das matrizes:

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 4:
Caminhando sobre os segmentos unitários da figura abaixo, determine quantos percursos distintos existem de A até B sem passar duas vezes por um mesmo ponto.



PROBLEMA 5:
Para todo real u, seja $I(u) = \int_0^{®} \ln(1 - 2u\cos x + u^2)dx.$

a) Prove que $I(u) = I(-u) = \frac{1}{2}I(u^2).$

b) Calcule $I(u)$ para todo $u \in \mathrm{R}$.

PROBLEMA 6:
Seja D o conjunto dos pontos p em R^2 com $|p| \le 1$. Seja $f : D \to D$ uma função sobrejetora satisfazendo $|f(p) - f(q)| \le |p - q|$ para quaisquer $p, q \in D$. Prove que f é uma isometria, isto é, que $|f(p) - f(q)| = |p - q|$ para quaisquer $p, q \in D$.

(Observação: $|(x, y)|$ denota $\sqrt{x^2 + y^2}$.)