XXIV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível Universitário

PROBLEMA 1

A função $f:(-1,+\infty)\to \mathbb{R}$ é contínua e derivável.
Sabe-se que $f(0) = 0$, $f'(0) = a$ e que $f(x + 1) = e^{f(x)}$ para todo $x > -1$.
Calcule $f'(3)$.

PROBLEMA 2

Seja A a matriz real $n \times n$

$$A=\begin{pmatrix} x+y & x & \dots & x \\ x & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & x+y \end{pmatrix}.$$

Diga para que valores de x e y a matriz A é inversível e calcule A^{-1}.

PROBLEMA 3

Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}\,dx.$

PROBLEMA 4

Determine todos os valores inteiros positivos de m para os quais o polinômio $(x + 1)^m + x^m + 1$ é divisível por $(x^2 + x + 1)^2$.

PROBLEMA 5

Jogamos 10 dados comuns (com 6 faces equiprováveis numeradas de 1 a 6).
Calcule a probabilidade de que a soma dos 10 resultados seja igual a 20.

PROBLEMA 6

Considere a curva $C=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 - 43x + 166\}$.

a) Seja $Q = (a, b)$ um ponto de C. Suponha que a reta tangente a C no ponto Q intersecte C num único outro ponto, Q'. Determine as coordenadas de Q'.

b) Seja $P_0 = (3, 8)$. Para cada inteiro não negativo n, definimos $P_{n+1} = P'_n$, o ponto de interseção de C com a reta tangente a C em P_n. Determine P_{2002}.

Soluções Nível Universitário

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Derivando a equação $f(x+1)=e^{f(x)}$ temos $f'(x+1)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$.(*)

Assim $f(1)=e^0=1,\;\; f'(1)=f'(0)\cdot e^{f(0)}=a$

$$f(2)=e^1=e,\;\; f'(2)=f'(1)\cdot e^{f(1)}=ae$$

$$f'(3)=f'(2)\cdot e^{f(2)}=ae^{e+1}$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Se $y = 0$ todas as linhas são iguais e a matriz não é inversível. Se $nx + y = 0$ a soma das n línhas é 0 e portanto a matriz novamente é não inversível. Vamos mostrar que se nenhuma destas duas condições ocorre a matriz é inversível.

Se $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ temos $B^2 = nB$ e $A = yI + nB$.

Tome $C=\dfrac{1}{y}I-\dfrac{x}{y(nx+y)}B.$

$$AC=(yI+xB)\left(\frac{1}{y}I-\frac{x}{y(nx+y)}B\right)=I$$

Comentário (não faz parte da solução):

Encontramos C conjecturando que $A^{-1}=uI+vB.$

E resolvendo um sistema para encontrar u e v. Pode-se demonstrar antes de tentar resolver o sistema que A^{-1}, se existir, deve ter a forma acima: A^{-1} é uma função analítica de A, logo um polinômio em A, logo um polinômio em B. Como observamos que B^2 é um múltiplo escalar de B segue que todo polinômio em B é da forma $uI + vB$.

SOLUÇÃO ALTERNATIVA

Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} (x+y)a_1 + x\cdot a_2 + \dots + x\cdot a_n = b_1 \\ x\cdot a_1 + (x+y)a_2 + \dots + x\cdot a_n = b_2 \\ \vdots \\ x\cdot a_1 + x\cdot a_2 + \dots + (x+y)\cdot a_n = b_n \end{cases}$$

Somando todas as equações, obtemos $(nx+y)(a_1+\dots+a_n)=(b_1+\dots+b_n)$, donde $x(a_1+\dots+a_n)=\dfrac{x}{nx+y}(b_1+\dots+b_n)$, caso $nx + y \neq 0$.

Diminuindo essa igualdade da j-ésima equação, obtemos $y\cdot a_j=b_j-\dfrac{x}{nx+y}(b_1+\dots+b_n)$ e, caso $y\neq 0,\; a_j=\dfrac{-x}{y(nx+y)}b_1-\dots+\dfrac{(n-1)x+y}{y(nx+y)}b_j-\dots-\dfrac{x}{y(nx+y)}b_n.$

Assim, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(n-1)x+y}{y(nx+y)} & \frac{-x}{y(nx+y)} & \cdots & \frac{-x}{y(nx+y)} \\ \frac{-x}{y(nx+y)} & \frac{(n-1)x+y}{y(nx+y)} & \cdots & \frac{-x}{y(nx+y)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-x}{y(nx+y)} & \frac{-x}{y(nx+y)} & \cdots & \frac{(n-1)x+y}{y(nx+y)} \end{pmatrix}.$

Note que, se $nx + y = 0$, o sistema não tem solução se $b_1 + ... + b_n \neq 0$, e, se $y = 0$, o sistema não tem solução se $b_j - \frac{x}{nx+y}(b_1 + ... + b_n) \neq 0$ para algum j. Em nenhum desses casos A é invertível.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Seja $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$. Racionalizando, temos

$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x-1)\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)}{(x^2+1)-(x+1)^2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2 - x^2}{-2x}$, logo $f(-x) = -f(x)$, para todo x, e

portanto, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.$

SOLUÇÃO ALTERNATIVA

Vamos achar uma primitiva de f: Em $\int \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}dx$ fazemos $x = tan\,¯$, $dx = sec^2¯\ d¯$, e, como

$\sqrt{\tan^2 ¯ + 1} = \sec ¯$ (para $\frac{-®}{2} < ¯ < \frac{®}{2}$), obtemos $\int \frac{\sec ¯ + \tan ¯ - 1}{\sec ¯ + \tan ¯ + 1} \cdot \sec^2 ¯\ d¯ =$

$\int \frac{1 + sen¯ - \cos ¯}{\cos^2 ¯ (1 + sen¯ + \cos ¯)} d¯.$

Fazendo $\tan \frac{¯}{2} = z,\ d¯ = \frac{2dz}{1+z^2},\ sen¯ = \frac{2z}{1+z^2}, \cos ¯ = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, obtemos

$\int \frac{2z^2+2z}{2+2z} \cdot \left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^2 \frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{2z(1+z^2)}{(1-z^2)^2 dz}.$

Buscando A, B, C, D tais que $\frac{A}{1+z} + \frac{B}{(1+z)^2} + \frac{C}{1-z} + \frac{D}{(1-z)^2} = \frac{2z(1+z^2)}{(1-z^2)^2}$, obtemos $(A + B + Az)(1 - z)^2 + (C + D - Cz)(1+z)^2 = 2z(1 + z)^2$, donde $A - C = 2$, $B - A + D - C = 0$, $-A$, $-2B + C + 2D = 2$, $A + B + C + D = 0$.
Assim, $D = -B$, $C = -A$, logo $A = 1$, $C = -1$, $D = 1$, $B = -1$.

Assim, $\int \frac{2z(1+z^2)}{(1-z^2)^2} dz = \ln(1+z) + \frac{1}{1+z} + \ln(1-z) + \frac{1}{1-z} = \ln(1-z^2) + \frac{2}{1-z^2}.$

Quando x varia entre -1 e 1, $¯$ varia entre $\frac{-®}{4}$ e $\frac{®}{4}$, donde z varia entre $-\tan\left(\frac{®}{8}\right)$ e $\tan\left(\frac{®}{8}\right)$. Temos

$-\tan\left(\frac{®}{8}\right) = \frac{sen\left(\frac{®}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{®}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1,$ donde z varia entre $1 - \sqrt{2}$ e $\sqrt{2} - 1$. Assim, a integral é

$\ln(1-z^2) + \frac{2}{1-z^2}\Big|_{1-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}-1} = 0,$ pois $(\sqrt{2}-1)^2 = (1-\sqrt{2})^2.$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Seja $\mu = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ uma raiz de $x^2 + x + 1$. Para que $(x^2 + x + 1)^2$ divida $(x + 1)^m + x^m + 1 = P(x)$, devemos ter $P(\mu) = 0$ e $P'(\mu) = 0$.

Assim, $(\mu + 1)^m + \mu^m = -1$ e $m((\mu + 1)^{m-1} + \mu^{m-1}) = 0.$

Temos que $\mu + 1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ é tal que $(\mu + 1)^2 = \mu$ e $(\mu + 1)^3 = -1$. Como μ e $\mu + 1$ são raízes sextas da unidade, o comportamento se repetirá com período 6.

Assim, $(\mu + 1)^{m-1} + \mu^{m-1} = 0$ equivale a $(\mu + 1)^{m-1} = -\mu^{m-1} = (\mu + 1)^{3+2(m-1)}$, ou seja $(\mu + 1)^{m+2} = 1,$ o que equivale a $m \equiv -2 \pmod 6$. Nesse caso, temos $(\mu + 1)^m + \mu^m = (\mu + 1)^4 + \mu = \mu^2 + \mu = -1,$ donde as duas condições são satisfeitas. Assim, os números que satisfazem o enunciado são os inteiros positivos da forma $6k - 2$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Devemos encontrar o número de soluções de $a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 20,\ 1 \le a_i \le 6.$

O número de soluções de $a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 20,\ a_i \ge 1$ é claramente $\binom{19}{9}$. Devemos agora descontar as soluções para as quais algum a_i é ≥ 7 pois isto implicaria na soma ser $\ge 7 + 7 + 8 \cdot 1 = 22$. Assim, basta descontar 10 vezes o número de soluções de $a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 20,\ a_i \ge 7,\ a_i \ge 1$,

ou de $\tilde{a}_1 + a_2 + ... + a_{10} = 14,\ \tilde{a}_i, a_i \ge 1$ que é $\binom{13}{9}$. Assim $N = \binom{19}{9} - 10\binom{13}{9}$ e a probabilidade pedida é

$$p = \frac{\binom{19}{9} - 10\binom{13}{9}}{6^{10}}.$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

a) De $y^2 = x^3 - 43x + 166,$ temos $2y\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 43,$ donde $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 43}{2y}$. A equação da reta tangente a C passando por (a, b) é $y = \left(\frac{3a^2 - 43}{2b}\right)x + \left(b - \left(\frac{3a^2 - 43}{2b}\right) \cdot a\right).$ Substituindo em $y^2 = x^3 - 43x + 166$ temos $x^3 - 43x + 166 = \left(\left(\frac{3a^2 - 43}{2b}\right)x + \frac{2b^2 - 3a^3 + 43a}{2b}\right)^2$, que terá uma raiz dupla em $x = a$, e cuja soma das raízes é $\left(\frac{3a^2 - 43}{2b}\right)^2$. Assim, o outro ponto terá primeira coordenada igual a $\left(\frac{3a^2 - 43}{2b}\right)^2 - 2a$, e, substituindo na equação da reta, segunda coordenada igual a

$$\left(\frac{3a^2 - 43}{2b}\right)^3 - 2a\left(\frac{3a^2 - 43}{2b}\right) + \frac{2b^2 - 3a^3 + 43a}{2b} = \left(\frac{3a^2 - 43}{2b}\right)^3 + \left(\frac{2b^2 - 9a^3 + 129a}{2b}\right).$$

b) Usando a fórmula acima, obtemos $P_1 = (-5, 16)$, $P_2 = (11, 32)$, $P_3 = (3, -8)$, $P_4 = (-5, -16)$, $P_5 = (11, -32)$ e $P_6 = (3, 8)$. Assim, a seqüência (P_n) é periódica de período 6, logo $P_{2002} = P_4 = (-5, -16)$.

Observação: No ítem b), o fato de P_3 diferir de P_0 apenas por uma troca de sinal da segunda coordenada já é suficiente para concluir que a seqüência é periódica de período 6.