IV Semana Olímpica – Nível 1 – Moedas e Subconjuntos

Prof. Paulo José – paulo@mail.org

1 Introdução:

Iniciemos com um problema proposto na segunda fase do nível 1 da OBM de 1999:

Pedro distribuiu 127 moedas de 1 real em sete caixas e colocou em cada uma delas uma etiqueta dizendo o número de moedas da caixa. Essa distribuição foi feita de forma que qualquer quantia de R \$ $1,00$ a R \$ $127,00$ pudesse ser paga entregando-se apenas caixas fechadas. De que maneira Pedro fez essa distribuição?

Obviamente deve existir uma caixa com somente uma moeda, para que essa quantia possa ser paga.
A quantia de 2 reais pode ser paga de duas maneiras:

(1) Com duas caixas contendo 1 moeda cada;

(2) Com uma única caixa contendo 2 moedas.

Qual dessas opções é melhor?
Note que se tivermos uma caixa com 2 reais conseguiremos pagar também uma quantia de 3 e por outro lado se tivermos duas caixas com 1 real só conseguiremos pagar 1 real e 2 reais.
Para que possamos obter o maior número possível de quantias pagas é natural escolher a distribuição das moedas nas caixas de modo que duas escolhas quaisquer de caixas resultem em quantias diferentes. Surgem então as seguintes questões:

(1) Será que isso é sempre possível?

(2) Se conseguirmos distribuir as moedas deste modo quantos serão as quantias que podem ser pagas?

Vamos numerar as caixas pelas letras $a, b, c, \dots, g$ e escrever $\{a, b, f\}$ para indicar que estamos escolhendo as caixas a, b e f. Cada subconjunto não-vazio do conjunto $\{a, b, c, \dots, g\}$ representará uma quantia a ser paga.
Percebe-se claramente que o número de quantias que podem ser pagas não é maior do que ou igual ao número de subconjuntos não-vazios de $\{a, b, c, \dots, g\}$. Tentemos, por enquanto, resolver esse outro problema:

2 Quantos subconjuntos?

É possível calcular de modo prático quantos subconjuntos possui um determinado conjunto finito?
Façamos uma tabela com conjuntos e seus respectivos subconjuntos e a partir dessa outra tabela relacionando número de elementos de um conjunto e quantidade de subconjuntos:

Conjunto	Subconjuntos
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset, \{a\}$
$\{a, b\}$	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$
$\{a, b, c\}$	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

# de elementos	# de Subconjuntos
0	1
1	2
2	4
3	8

É possível tirar algum proveito desses dados?
Os mais atentos terão observado que, nesses casos particulares, a quantidade de subconjuntos dobra quando acrescentamos um elemento. Será que isso vale sempre? Suponha que temos um conjunto A com 100 elementos e este

possui a subconjuntos. Acrescentemos um elemento x, de modo a obter um conjunto B com 101 elementos e b subconjuntos.
O conjunto B possui dois tipos de subconjuntos:

1. Subconjuntos que não contêm o elemento x e logo são subconjuntos de A. Portanto, são a subconjuntos deste tipo.

2. Subconjuntos que contêm o elemento x. Se de cada um destes subconjuntos suprimirmos o elemento x obteremos todos os subconjuntos de A. Portanto, também existem a subconjuntos deste tipo.

Segue desses fatos que $b = 2a$ e então nossa observação é válida.
Podemos fazer uma nova tabela relacionando número de elementos e número de subconjuntos:

# de elementos	# de Subconjuntos
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	$16 = 2^4$
5	$32 = 2^5$

Portanto, um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos.
Voltando ao problema, concluímos que o número de quantias pagas não pode ser maior que $2^7 - 1 = 127$ que é o número de subconjuntos não-vazios de um conjunto com 7 elementos.
Como queremos pagar 127 quantias, devemos distribuir as moedas nas caixas de modo que dois quaisquer subconjuntos das mesmas paguem quantias distintas.
A terceira caixa deve conter então no mínimo 4 moedas e como esse valor deve ser pago de algum modo, concluímos que devem ser exatamente 4 moedas. Com essas três caixas conseguimos pagar todas as $2^3 - 1 = 7$ quantias de 1 a 7 reais. Escolhendo a quarta caixa com 8 moedas já conseguimos pagar também todas as quantias de 8 a 15 reais. Escolhendo a quinta caixa com 16 conseguimos pagar as quantias de 16 a 31, e escolhendo a sexta caixa com 32 moedas conseguimos pagar as quantias de 32 a 63 reais. Finalmente escolhemos a sétima caixa com 64 moedas e obtemos todas as quantias de 1 a 127 reais.
Observe que $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 64 = 127$.
Na verdade, uma possível solução para o problema consiste basicamente nesse último parágrafo, mas com as idéias ilustradas é possível mostrar que a solução obtida é única (por que?) e que o problema não teria solução com 128 moedas, por exemplo.

3 Exercícios Propostos

1. Qual é o número mínimo de pesos que são capazes de pesar qualquer número inteiro de gramas de ouro de 1 a 100 em uma balança de pratos? Os pesos podem ser colocados somente no lado esquerdo da balança.

2. Qual o maior número de 10 algarismos na base 2?

3. Qual é o número mínimo de pesos que são capazes de pesar qualquer número inteiro de gramas de ouro de 1 a 100 em uma balança de pratos? Os pesos podem ser colocados nos dois pratos da balança.

4. Prove que, dado um conjunto com n elementos, é possível formar uma fila com seus subconjuntos de tal modo que cada subconjunto da fila pode ser obtido a partir do anterior pelo acréscimo ou pela supressão de um único elemento.