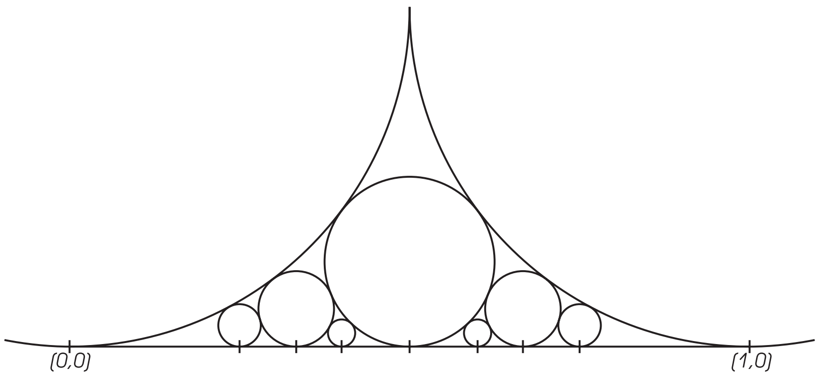
IV Semana Olímpica – Nível 3 – Inversão

Prof. Paulo José – paulo@mail.org

■ Problema 1
Dadas duas circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ tangentes a uma reta r e tangentes entre si, construir uma terceira circunferência tangente à reta e às duas circunferências.

■ Problema 2
Na construção abaixo, identifique o conjunto dos pontos de tangência entre os círculos e a reta. Inicialmente traçamos círculos de raio $1/2$ tangenciando o eixo x nos pontos $(i, 0)$, i inteiro. A seguir desenhamos pequenos círculos dentro de cada compartimento formado acima do eixo x, sempre tangenciando os três lados. Esse último passo é repetido infinitas vezes, desenhando sempre um novo círculo dentro de cada novo compartimento de tal forma que a cada passo a partir de cada compartimento velho obtemos dois compartimentos novos.



■ Problema 3(a) Construa o ponto médio de um segmento usando somente compasso.
(b) Construa o centro de uma circunferência usando somente compasso.

■ Problema 4
Construa uma circunferência tangente a três circunferências dadas.

■ Problema 5
Considere uma circunferência $\mathcal{K}_0$ de diâmetro AB e seja M um ponto sobre AB. Construa duas semi-circunferências $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ de diâmetros AM e MB. A circunferência $\mathcal{C}_1$ é tangente internamente a $\mathcal{K}_0$ e externamente a $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$. A seguir, construa circunferências $\mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n, \ldots$ tais que $\mathcal{C}_i$ é tangente internamente a $\mathcal{K}_0$ e externamente a $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{C}_{i-1}$. Sejam r_n o raio de $\mathcal{C}_n$ e h_n a distância do centro de $\mathcal{C}_n$ a AB. Prove que

$$h_n = 2nr_n.$$