Pequenas demonstrações e aplicações

Professor Emiliano Augusto Chagas

Mas antes vamos lembrar dos critérios de congruência entre triângulos!
Dois triângulos são congruentes entre si se eles possuem:

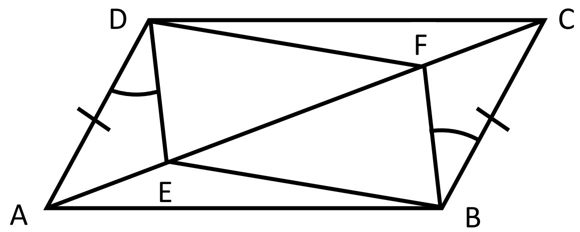
- **LLL** - os seus três lados congruentes
- **LAL** - um lado, um ângulo e um lado (nessa ordem) congruentes
- **ALA** - um ângulo, um lado e um ângulo (nessa ordem) congruentes
- **LAA$_o$** - um lado, um ângulo e o ângulo oposto ao lado (nessa ordem) congruentes

Para esquentar!

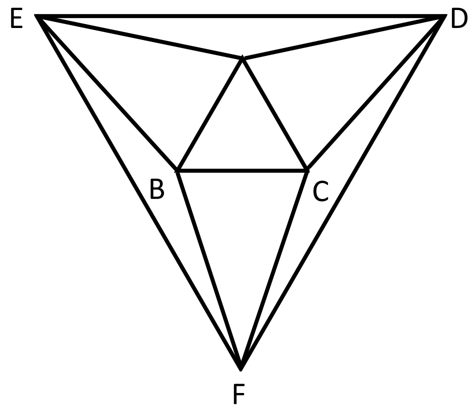
01)a) Prove que num triângulo isósceles ABC de base BC temos que $\angle B = \angle C$. b) Prove que um triângulo ABC que possui $\angle B = \angle C$ é isósceles.

Conclusão: Dizer que um triângulo ABC é isósceles é ***equivalente*** a dizer que esse triângulo possui dois ângulos congruentes.

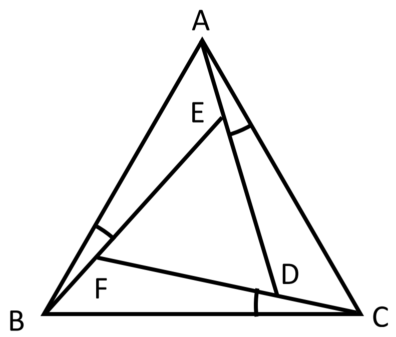
02) Na figura a seguir, $AD = BC$, $AD \parallel BC$, e E e F estão no segmento AC tal que $\angle ADE = \angle CBF$. Prove que $AB \parallel CD$ e $DF = EB$.



03) Na figura a seguir, o $\triangle ABC$ é equilátero e AE = EB = BF = CF = AD = CD tal que $\triangle ABC$ está completamente dentro do $\triangle DEF$. Prove que o $\triangle DEF$ é equilátero.



04) Na figura a seguir, o $\triangle ABC$ é equilátero. Os pontos D, e e F estão no $\triangle ABC$ tal que $\angle CAD = \angle ABE = \angle BCF$. D está no segmento CF, E no segmento AD e F no segmento BE. Prove que o $\triangle DEF$ é equilátero.



Alguns Quadriláteros

Paralelogramo: possui dois pares de lados paralelos
Losango: possui os quatro lados congruentes
Retângulo: possui os quatro ângulos congruentes
Quadrado: possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes

ATENÇÃO! ATENCIÓN! ATENTION! ACHTUNG! Um quadrado possui os quatro lados congruentes bem como um losango. Podemos dizer que um quadrado é *equivalente* a um losango? NÃO! Podemos dizer que todo quadrado é um losango, mas não podemos afirmar que todo losango é um quadrado.

05) Considere um quadrilátero ABCD cujos lados opostos AB e CD são tais que AB = CD e os outros dois lados opostos AD e BC são tais que AD = BC. Prove que ABCD é um paralelogramo.

06) Prove que num paralelogramo ABCD cujos pares de lados opostos são AB e CD, e também AD e BC, temos que AB = CD e AD = BC.

O problema 5 diz: "Se um quadrilátero ABCD possui AB = CD e AD = BC, então esse quadrilátero é um paralelogramo". Na verdade um bom matemático preguiçoso escreveria "ABCD com AB = CD e AD = BC $\Rightarrow$ ABCD paralelogramo".
Já o problema 6 diz: "Se um quadrilátero ABCD é um paralelogramo, então temos AB = CD e AD = BC", ou ainda "ABCD paralelogramo $\Rightarrow$ ABCD com AB = CD e AD = BC".
Notaram que do problema 5 para o problema 6 bastaria trocar a posição da seta? Quando isso ocorre, podemos dizer que as duas condições são **equivalentes** e podemos escrever: "Um quadrilátero ABCD possui AB = CD e AD = BC se, e somente se, ABCD é um paralelogramo" ou ainda "ABCD com AB = CD e AD = BC $\Leftrightarrow$ ABCD paralelogramo".

07) Prove que num paralelogramo, as diagonais se cortam em seus pontos médios.

08) Prove a recíproca! Ou seja, se num quadrilátero as diagonais se cortam em seus pontos médios, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

09) Prove que todo losango é um paralelogramo. Atenção! Ao provar isso, **TUDO** que foi provado para paralelogramos também vale para o losango!

10) Prove que todo retângulo é um paralelogramo.

11) Prove que as diagonais do retângulo são congruentes.

12) Seja *ABC* um triângulo retângulo em *A*, com $m(\hat{B}) - 2m(\hat{C}) = 10^o$. Seja *H* o pé da altura relativa a hipotenusa de *ABC* e *M* o ponto médio de *BC*. Encontre a medida do ângulo $H\hat{A}M$.

13) Seja *ABC* um triângulo retângulo em *C*, com $m(\hat{A}) = 27^o$. Sejam *m* a mediana relativa ao lado *AB* e seja *P* um ponto no prolongamento do lado *AB* tal que *CP* seja perpendicular a *m*. A bissetriz do ângulo $A\hat{P}C$ intersecta *BC* em *R*, e *AC* em *S*. Encontre a medida dos ângulos $C\hat{R}S$ e $C\hat{S}R$.

14) Dado o triângulo *ABC*, com $BC < AC$, seja *K* o ponto médio de *AB* e *L* o ponto de *AC* tal que $AL = LC + CB$. Mostre que se $K\hat{L}B = 90^o$, então $AC = 3CB$ e, reciprocamente, se $AC = 3CB$, então $K\hat{L}B = 90^o$.

15) Seja *ABC* um triângulo retângulo em *C*, com $m(\hat{A}) = \theta$, $\theta < 45^0$. Sejam *m* a mediana relativa ao lado *AB* e seja *P* um ponto no prolongamento do lado *AB* tal que *CP* seja perpendicular a *m*. A bissetriz do ângulo $A\hat{P}C$ intersecta *BC* em *R*, e *AC* em *S*. Encontre a medida dos ângulos $C\hat{R}S$ e $C\hat{S}R$.