Pode contar comigo!

Carlos Shine

Vocês já devem ter visto as seguintes técnicas de contagem:

- Contagem direta com os princípios da adição e multiplicação;
- Bijeções;
- Recursões;
- Contagem de Pólya;
- Funções geratrizes.

Veremos agora um novo tipo de estrutura combinatória que tenta unificar de algum modo essas ideias, as *espécies*.

1 Espécie combinatória

Vamos começar com uma definição não muito formal de espécie combinatória. A ideia é que temos um conjunto U de *rótulos*; uma espécie é um conjunto de objetos com esses rótulos que obedecem a uma regra. Um pouco (mas não muito) mais formalmente, uma *espécie* $\mathcal{F}$ em um conjunto U é uma regra que produz um conjunto $\mathcal{F}[U]$ chamado *conjunto de $\mathcal{F}$-estrutura em U*. A espécie deve também satisfazer a seguinte condição: dada uma bijeção $\sigma\colon U \to V$, $\mathcal{F}$ produz uma função $\mathcal{F}[\sigma]\colon \mathcal{F}[U] \to \mathcal{F}[V]$, chamada *transporte de U a V*. Essas funções transporte devem satisfazer as seguintes propriedades de funtores:

- Sendo $\sigma\colon U \to V$ e $\tau\colon V \to W$ bijeções, $\mathcal{F}[\tau \circ \sigma] = \mathcal{F}[\tau] \circ \mathcal{F}[\sigma]$;
- Para a identidade $Id_U\colon U \to U$ ($Id(x) = x$), $\mathcal{F}[Id_U] = Id_{\mathcal{F}[U]}$.

As funções transporte são só um jeito de dizer que se mudamos os rótulos, a estrutura não muda:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, leftrightarrow, "\sigma"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & V \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
\mathcal{F}[U] \arrow[r, leftrightarrow, "\mathcal{F}[\sigma]"] & \mathcal{F}[V]
\end{tikzcd}$$

Se você quer realmente uma definição formal, uma espécie é um funtor da categoria dos conjuntos munidos de bijeções nele mesmo. Uma *categoria* consiste de uma classe de objetos e uma classe de “setas” entre objetos, sendo que as setas são aplicações associativas e existe a seta identidade para cada objeto. Um *funtor* é uma associação entre categorias que tem exatamente as mesmas duas propriedades descritas acima. Existe a *teoria de categorias*, que estuda todas essas coisas, e as espécies acabaram originando um outro ramo da Combinatória que se mistura com a teoria de categorias.

Um exemplo simples é a espécie $\mathcal{G}$ dos grafos. Dado um conjunto V de vértices, $\mathcal{G}[V]$ é o conjunto dos grafos com vértices em V, ou seja,

$$\mathcal{G}[V] = \left\{ (V, A), A \subset \binom{V}{2} \right\}.$$

Dessa forma, as seguintes afirmações são equivalentes:

- g é um grafo com vértices em V;
- $g \in \mathcal{G}[V]$;
- g é uma $\mathcal{G}$-estrutura em V.

O transporte simplesmente leva vértices de um conjunto V aos seus correspondentes em W. Sendo $\sigma\colon V \to W$ a bijeção, cada aresta $\{v_1, v_2\}$ em $g \in \mathcal{G}[V]$ é levada à aresta $\{\sigma(v_1), \sigma(v_2)\}$ em $\sigma \cdot g \in \mathcal{G}[W]$. Ou seja, o transporte é essencialmente um jeito de transferir os rótulos (nós "rerrotulamos" o conjunto, mantendo a estrutura). Como você pode ver, na maioria das vezes o transporte é bem natural.

Por que espécies são legais? O motivo é que agora podemos tratar objetos combinatórios algebricamente. Isso mesmo! A gente pode fazer conta com grafos, permutações, conjuntos, ordenações...

2 Algumas espécies simples

Vamos listar algumas espécies simples. Pensaremos sempre em como cada espécie *coloca estrutura* em um conjunto.

- A espécie vazia $\mathbf{0}$ não coloca estrutura alguma:

$$\mathbf{0}[U] = \emptyset.$$

- A espécie do conjunto vazio $\mathbf{1}$ só coloca a estrutura de um ponto no vazio e nada no resto:

$$\mathbf{1}[U] = \begin{cases} U, & \text{se } U = \emptyset \\ \emptyset, & \text{se } U \neq \emptyset \end{cases}.$$

- A espécie do unitário X coloca a estrutura de um ponto nos unitários e nada no resto. Ele serve para destacar um ponto dos outros e, apesar de não parecer, ele é bastante útil!

$$X[U] = \begin{cases} U, & \text{se } |U| = 1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

- A espécie *conjunto* E é bem simples: é a estrutura do próprio conjunto. Em outras palavras, ele coloca o rótulo U no conjunto U:

$$E[U] = \{U\}.$$

- A espécie das permutações $\mathcal{P}$ é composta pelas permutações. Ou seja, $\mathcal{P}[U]$ é o conjunto das permutações dos elementos de U. A função transporte é

$$\mathcal{P}[\sigma](\pi) = \sigma\pi\sigma^{-1}.$$

  De fato, dado $\sigma\colon U \to V$, $\mathcal{P}[\sigma](\pi)$ transforma V em $\sigma\pi\sigma^{-1}(V) = \sigma\pi(U)$, que é uma permutação de elementos de V. É fácil ver que o transporte tem as propriedades de funtores.

- A espécie das ordens totais $\mathcal{L}$ é composta por todas as ordens totais. $\mathcal{L}[U]$ é o conjunto das ordens totais em U. A função transporte é

$$\mathcal{L}[\sigma](a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_n) = \sigma(a_1) \succ \sigma(a_2) \succ \ldots \succ \sigma(a_n).$$

  Apesar de as quantidades de permutações e de ordens serem iguais a $|U|!$, as espécies são diferentes, já que permutações são funções que podem ser compostas e ordens totais não.

À medida que forem aparecendo introduziremos outras espécies.

3 Funções geratrizes de espécies: rótulos e sem rótulos

Espécies induzem algumas funções geratrizes, que resolvem vários problemas de contagem.

3.1 Função geratriz exponencial

Por causa da bijeção, a quantidade de objetos depende só da quantidade de elementos do conjunto de rótulos. Sendo $\mathcal{F}$ uma espécie e $|\mathcal{F}[n]|$ a quantidade de $\mathcal{F}$-estruturas em um conjunto com n elementos, definimos a função geratriz exponencial

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n\geq 0} |\mathcal{F}[n]| \frac{x^n}{n!}.$$

3.2 Função geratriz dos tipos

Se tiramos os rótulos do conjunto, temos a função geratriz dos tipos (ou seja, ao tirarmos os rótulos temos *tipos de estruturas*). Definimos sua função geratriz (não exponencial!) dos tipos por

$$\tilde{\mathcal{F}}(x) = \sum_{n\geq 0} |\tilde{\mathcal{F}}[n]| x^n.$$

Vamos ser mais precisos. Considere $\mathcal{F}[[n]]$, sendo $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dizemos que $s, t \in \mathcal{F}[[n]]$ são equivalentes e denotamos $s \sim t$ quando existe uma permutação π em $[n]$ tal que $\mathcal{F}[\pi](s) = t$ (ou seja, dá para permutar os rótulos de s para obter a mesma estrutura com rótulos em t, que é a mesma coisa que dizer que se tirarmos os rótulos dá no mesmo). Então $\tilde{\mathcal{F}}[n] = \mathcal{F}/\sim$ é obtido fazendo o quociente de $\mathcal{F}$ com a relação de equivalência $\sim$.

Por exemplo, há só uma maneira de ordenar n elementos sem rótulos, de modo que

$$\tilde{\mathcal{L}}(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Em compensação, observando que podemos definir permutação como uma partição de ciclos (desenhe o grafo direcionado com vértices em U e arestas da forma $u \to \sigma(u)$), ao tirarmos os rótulos ficamos só com partições (já que não faz sentido ordenar em ciclos coisas sem rótulo). Assim, ao tirarmos os rótulos temos simplesmente partições, e

$$\tilde{\mathcal{P}}(x) = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^k}.$$

3.3 Série de índice de ciclos

Aqui as coisas ficam mais interessantes. A ideia é generalizar o lema de Burnside para podermos obter relações entre funções geratrizes e permitir o cálculo das funções geratrizes de tipo. Primeiro vamos entender o que é ciclo: na permutação σ, seja σ_i a quantidade de ciclos de tamanho i em σ (novamente, pense no grafo da permutação). Então dizemos que σ tem *tipo de ciclo* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$. Note que σ_1 é, por exemplo, a quantidade de pontos fixos e que se σ é uma permutação de n elementos temos $\sum_{k\leq 1} k\sigma_k = n$.

Denotaremos $\operatorname{Fix}(\sigma)$ como o conjunto dos pontos fixos de σ e $\operatorname{fix}(\sigma) = |\operatorname{Fix}(\sigma)| = \sigma_1$.

Agora, sendo U um conjunto de rótulos, cada permutação σ de U induz uma permutação $\mathcal{F}[\sigma]$ de $\mathcal{F}[U]$, via transporte. Por exemplo, sendo **Inv** a espécie das involuções (ou seja, permutações ϕ tais que $\phi \circ \phi$ é a identidade), $U = \{a, b, c, d, e\}$ e σ a permutação com ciclos (ab) e (cde) (podemos escrever $\sigma = (ab)(cde)$), $\mathbf{Inv}[\sigma]$ é uma permutação das 26 (confira!) involuções em U. Só duas involuções ficam fixadas: a identidade Id e a que troca a e b e mantém o resto (ab), então $\operatorname{Fix} \mathbf{Inv}[\sigma] = \{Id, (ab)\}$ e $\operatorname{fix} \mathbf{Inv}[\sigma] = 2$.

Com isso, podemos definir a série de ciclos: ela tem infinitas variáveis e

$$Z_{\mathcal{F}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{P}[[n]]} \operatorname{fix} \mathcal{F}[\sigma] x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \ldots \right).$$

em que $\mathcal{P}[[n]]$ é o conjunto das permutações de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

3.4 Relações entre as funções geratrizes

A série de índice de ciclos generaliza as outras duas.

Teorema 1. *Sendo $\mathcal{F}$ uma espécie,*

$$\mathcal{F}(x) = Z_{\mathcal{F}}(x, 0, 0, \dots) \quad e \quad \tilde{\mathcal{F}}(x) = Z_{\mathcal{F}}(x, x^2, x^3, \dots).$$

Demonstração: É só substituir e ver no que dá:

$$Z_{\mathcal{F}}(x, 0, 0, \dots) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{P}[[n]]} \operatorname{fix} \mathcal{F}[\sigma] x^{\sigma_1} 0^{\sigma_2} 0^{\sigma_3} \dots \right)$$

O termo só não zera quando $\sigma_2 = \sigma_3 = \cdots = 0$ e $\sigma_1 = n$, ou seja, todos são pontos fixos e a única permutação que contribui na soma é a identidade. Assim, como todas as espécies são fixadas pela identidade $\operatorname{fix} \mathcal{F}[Id] = |\mathcal{F}[n]|$ e

$$Z_{\mathcal{F}}(x, 0, 0, \dots) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \operatorname{fix} \mathcal{F}[Id] x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{|\mathcal{F}[n]|}{n!} x^n = \mathcal{F}(x).$$

Para a segunda identidade, fazemos o mesmo, lembrando que $\sum_{k\geq 1} k\sigma_k = n$:

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{F}}(x, x^2, x^3, \dots) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{P}[[n]]} \operatorname{fix} \mathcal{F}[\sigma] x^{\sigma_1} x^{2\sigma_2} x^{3\sigma_3} \dots \right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{P}[[n]]} \operatorname{fix} \mathcal{F}[\sigma] x^{\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + \cdots} \right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{P}[[n]]} \operatorname{fix} \mathcal{F}[\sigma] x^n \right). \end{aligned}$$

Mas essa última expressão é exatamente o lema de Burnside para o grupo das permutações, o que dá exatamente a definição de tipo de estrutura! Logo

$$Z_{\mathcal{F}}(x, x^2, x^3, \dots) = \sum_{n\geq 0} |\tilde{\mathcal{F}}[n]| x^n = \tilde{\mathcal{F}}(x).$$

□

Vamos ver, por exemplo, a espécie dos conjuntos. Temos $|E[n]| = 1$, logo

$$E(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Além disso, se tirarmos os rótulos de um conjunto, ainda temos $|\tilde{E}[n]| = 1$, assim

$$\tilde{E}(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

A série de índice de ciclos é (novamente) mais interessante. Como E não faz nada além de mandar o conjunto no seu próprio nome, o $E[\sigma]$ não é excitante, pois $E[U] = \{U\}$ só tem um elemento e a única permutação é a do unitário, que fixa o próprio conjunto! Ou seja, $\operatorname{fix} E[\sigma] = 1$. Assim, basta contar quantas permutações têm σ_i ciclos de tamanho i. Mas aí é só fazer um anagrama com i cópias de σ_i símbolos para indicar qual número vai para qual ciclo: por exemplo, $BANANABO$ coloca ciclos em $\{1, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{3, 5\}$ e $\{7\}$. Isso pode ser feito de $\frac{n!}{1!^{\sigma_1} 2!^{\sigma_2} \cdots n!^{\sigma_n}}$. Ainda temos que permutar cada conjunto ciclicamente, obtendo

$$\frac{n!}{1!^{\sigma_1} 2!^{\sigma_2} \cdots n!^{\sigma_n}} 0!^{\sigma_1} 1!^{\sigma_2} \cdots (n-1)!^{\sigma_n} = \frac{n!}{1^{\sigma_1} 2^{\sigma_2} \cdots n^{\sigma_n}}.$$

Mas $BANANABO$ gera os mesmos ciclos que $NABABANO$, então dividimos tudo por $\sigma_1!\,\sigma_2!\cdots\sigma_n!$, obtendo finalmente

$$\frac{n!}{1^{\sigma_1}2^{\sigma_2}\cdots n^{\sigma_n}\sigma_1!\,\sigma_2!\cdots\sigma_n!}.$$

Enfim,

$$\begin{aligned} Z_E(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\sum_{\sum_{i\geq 1} i\sigma_i = n}\frac{n!}{1^{\sigma_1}2^{\sigma_2}\cdots n^{\sigma_n}\sigma_1!\,\sigma_2!\cdots\sigma_n!}x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n}\right) \\ &= \sum_{\sigma_i\geq 0}\prod_{i\geq 1}\frac{(x_i/i)^{\sigma_i}}{\sigma_i!} = \prod_{i\geq 1}\exp\left(\frac{x_i}{i}\right) = \exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{x_i}{i}\right). \end{aligned}$$

Note que

$$E(x) = Z_E(x,0,0,\ldots) = \exp(x) = e^x$$

e

$$\tilde{E}(x) = Z_E(x,x^2,x^3,\ldots) = \exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{x^i}{i}\right) = \exp(-\ln(1-x)) = \frac{1}{1-x},$$

exemplificando o teorema.

3.5 Funções geratrizes das espécies vistas até agora

Você pode provar os seguintes resultados:

Espécie	Símbolo	F. G. Exp.	F. G. Tipo	Série de Índice de Ciclos
Vazio	$\mathbf{0}$	0	0	0
Conjunto vazio	$\mathbf{1}$	1	1	1
Unitário	X	x	x	x_1
Conjunto	E	e^x	$\frac{1}{1-x}$	$\exp\left(\sum_{k\geq 1} x_i/i\right)$
Permutações	$\mathcal{P}$	$\frac{1}{1-x}$	$\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^k}$	$\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x_k}$
Ordens totais	$\mathcal{L}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x_1}$

4 Igualdade de espécies

Cometeremos o abuso de linguagem de afirmar que duas espécies $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são consideradas iguais quando elas são *isomorfas*, ou seja, existe uma família de bijeções $\alpha_U\colon \mathcal{F}[U]\to\mathcal{G}[U]$ que têm a seguinte propriedade natural: se $\sigma\colon U\to V$ é uma bijeção, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}[U] \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\mathcal{F}[\sigma]"'] & \mathcal{G}[U] \arrow[d, "\mathcal{G}[\sigma]"] \\ \mathcal{F}[V] \arrow[r, "\alpha_V"] & \mathcal{G}[V] \end{tikzcd}$$

Ou seja, para toda $\mathcal{F}$-estrutura s, $\mathcal{G}[\sigma](\alpha_U(s)) = \alpha_V(\mathcal{F}[\sigma](s))$. Intuitivamente: dá para bijetar duas estruturas $\mathcal{F}[U]$ e $\mathcal{G}[U]$ do mesmo conjunto, mantendo a estrutura de transporte.

Note que, por causa disso, todas as funções geratrizes de duas espécies isomorfas são iguais. Isso também mostra que espécies podem ter a mesma quantidade de elementos mas são diferentes (como por exemplo, ordens totais e permutações; isto é, $\mathcal{L}\neq\mathcal{P}$).

5 Operações entre espécies

O legal é que podemos fazer conta com espécies, e cada conta tem um significado combinatório. Com isso, podemos transformar uma sentença combinatória em uma equação!

No que se segue, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são duas espécies arbitrárias.

5.1 Soma

A espécie $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ tem as seguintes características:

- Para cada conjunto de rótulos U, $(\mathcal{F}+\mathcal{G})[U]$ é a união *disjunta* de $\mathcal{F}[U]$ e $\mathcal{G}[U]$:

  $$(\mathcal{F}+\mathcal{G})[U] = \mathcal{F}[U] \sqcup \mathcal{G}[U].$$

  Caso $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ tenham interseção não vazia (o que normalmente não é feito; isso é o mesmo que divisão em casos – preferimos dividir em casos disjuntos), fazemos a seguinte adaptação, que é o mesmo que "pintar" os elementos de $\mathcal{F}[U]$ de vermelho (cor 1) e os elementos de $\mathcal{G}[U]$ de azul (cor 2):

  $$(\mathcal{F}+\mathcal{G})[U] = (\mathcal{F}[U]\times\{1\}) \sqcup (\mathcal{G}[U]\times\{2\}).$$

- O transporte é naturalmente induzido: sendo s uma $(\mathcal{F}+\mathcal{G})$-estrutura de U e $\sigma\colon U\to V$ uma bijeção,

  $$(\mathcal{F}+\mathcal{G})[\sigma](s) = \begin{cases} \mathcal{F}[\sigma](s) & \text{se } s\in\mathcal{F}[U] \\ \mathcal{G}[\sigma](s) & \text{se } s\in\mathcal{G}[U] \end{cases},$$

  ou seja, usamos a regra de $\mathcal{F}$ se s é uma $\mathcal{F}$-estrutura e usamos a regra de $\mathcal{G}$ se s é uma $\mathcal{G}$-estrutura.

Em termos de funções geratrizes, temos, como é de se esperar,

- $(\mathcal{F}+\mathcal{G})(x) = \mathcal{F}(x)+\mathcal{G}(x)$;
- $(\widetilde{\mathcal{F}+\mathcal{G}})(x) = \tilde{\mathcal{F}}(x)+\tilde{\mathcal{G}}(x)$;
- $Z_{\mathcal{F}+\mathcal{G}}(x_1,x_2,\dots) = Z_{\mathcal{F}}(x_1,x_2,\dots)+Z_{\mathcal{G}}(x_1,x_2,\dots)$

Como exemplo, $\mathbf{1}+X$ é a espécie dos conjuntos com no máximo 1 elemento. Além disso, não é difícil verificar que $\mathcal{F}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathcal{F}=\mathcal{F}$, a soma é comutativa e é possível somar mais de duas espécies.

5.2 Produto

A espécie $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}$ é mais ou menos o que se espera também, do ponto de vista de funções geratrizes:

- Sendo U um conjunto de rótulos, $(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G})[U]$ é o conjunto de todas as maneiras de particionar U em dois conjuntos e colocar $\mathcal{F}$ em um deles e $\mathcal{G}$ no outro:

  $$(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G})[U] = \sum_{U_1\sqcup U_2=U} \mathcal{F}[U_1]\times\mathcal{G}[U_2].$$

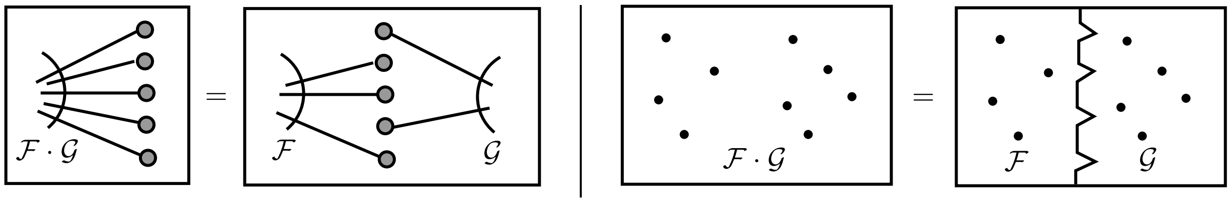
  Note que um típico elemento $u\in(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G})[U]$ é um par ordenado (f,g) com $f\in\mathcal{F}[U]$ e $g\in\mathcal{G}[U]$.

- O transporte também é bem natural: sendo $s=(f,g)$ com $f\in\mathcal{F}[U_1]$ e $g\in\mathcal{G}[U_2]$,

  $$(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G})[\sigma](s) = (\mathcal{F}[\sigma_1](f),\mathcal{G}[\sigma_2](g)),$$

  sendo σ_1,σ_2 as restrições de σ em U_1,U_2, respectivamente (ou seja, aplicamos σ em U_1 e U_2).

As seguintes figuras costumam ajudar:



As funções geratrizes funcionam perfeitamente:

- É de se esperar que a função geratriz exponencial seja o produto. De fato,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x) \cdot \mathcal{G}(x) &= \sum_{n\ge 0} |\mathcal{F}[n]|\frac{x^n}{n!} \sum_{m\ge 0} |\mathcal{G}[n]|\frac{x^m}{m!} = \sum_{m,n\ge 0} \binom{m+n}{m} |\mathcal{F}[n]||\mathcal{G}[n]|\frac{x^{m+n}}{(m+n)!} \\ &= \sum_{n\ge 0}\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} |\mathcal{F}[k]||\mathcal{G}[n-k]|\frac{x^n}{n!},\end{aligned}$$

  que é exatamente $(\mathcal{F} \cdot \mathcal{G})(x)$: escolhemos k objetos para ter estrutura $\mathcal{F}$, e os outros $n-k$ têm estrutura $\mathcal{G}$, e somamos sobre todos os k. Em resumo,

$$(\mathcal{F} \cdot \mathcal{G})(x) = \mathcal{F}(x) \cdot \mathcal{G}(x).$$

  Note que no primeiro membro, $\cdot$ é uma operação entre espécies e, no segundo membro, $\cdot$ é uma operação entre séries formais.

- Você também pode provar, diretamente da fórmula de convolução, que

$$(\widetilde{\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}})(x) = \tilde{\mathcal{F}}(x) \cdot \tilde{\mathcal{G}}(x).$$

- Além disso,

$$Z_{\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}}(x_1, x_2, \ldots) = Z_{\mathcal{F}}(x_1, x_2, \ldots) \cdot Z_{\mathcal{G}}(x_1, x_2, \ldots).$$

As propriedades usuais de multiplicação são válidas: $\mathbf{0} \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{1} \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F} \cdot \mathbf{1} = \mathcal{F}$, associatividade, comutatividade e distributiva com a soma.

Há vários exemplos bacanas. Por exemplo, lembrando que E é a espécie dos conjuntos, o produto $E \cdot E[U]$ nos dá todas as partições (U_1, U_2) de U. Mas isso é o mesmo que enumerar todos os subconjuntos U_1 de U (U_2 é o mesmo que "não estar em U_1"). Com isso, $E \cdot E$ é a espécie de *subconjuntos*! Vamos fazer as contas com funções geratrizes:

$$(E \cdot E)(x) = E(x) \cdot E(x) = e^{2x} = \sum_{n\ge 0} 2^n \frac{x^n}{n!},$$

o que é coerente com um conjunto de n elementos ter 2^n subconjuntos.

Além disso,

$$(\widetilde{E \cdot E})(x) = \tilde{E}(x) \cdot \tilde{E}(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\ge 0}(n+1)x^n,$$

o que condiz com o fato de podermos separar n objetos idênticos em duas pilhas de $n+1$ maneiras.

Finalmente,

$$Z_{E\cdot E}(x_1, x_2, \ldots) = Z_E(x_1, x_2, \ldots) \cdot Z_E(x_1, x_2, \ldots) = \exp\left(\sum_{k\ge 1} \frac{2x_i}{i}\right)$$

Outro exemplo mais legal. Sendo $\mathcal{D}$ a espécie das *desarrumações* ou *permutações caóticas*, podemos particionar uma permutação em um conjunto de pontos fixos e uma permutação caótica. Interpretando o conjunto de pontos fixos como um conjunto simples, temos

$$\mathcal{P} = E \cdot \mathcal{D}$$

O que as funções geratrizes nos dizem?

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) = E(x)\cdot\mathcal{D}(x) &\iff \frac{1}{1-x} = e^x\cdot\mathcal{D}(x) \iff \mathcal{D}(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}\\ &\iff \mathcal{D}(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\sum_{\ell\geq 0} x^\ell \iff \mathcal{D}(x) = \sum_{k,\ell\geq 0}\frac{(-1)^k x^{k+\ell}}{k!}\\ &\iff \mathcal{D}(x) = \sum_{n\geq 0}\sum_{0\leq k\leq n}\frac{(-1)^k n!}{k!}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

e achamos a fórmula das permutações caóticas!

A função geratriz dos tipos não é tão excitante assim:

$$\tilde{\mathcal{P}}(x) = \tilde{E}(x)\cdot\tilde{\mathcal{D}}(x) \iff \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^k} = \frac{1}{1-x}\cdot\tilde{\mathcal{D}}(x) \iff \tilde{\mathcal{D}}(x) = \prod_{k\geq 2}\frac{1}{1-x^k}$$

o que só quer dizer que temos as partições em conjuntos com pelo menos dois elementos.

A série de índices de ciclos diz mais ou menos as mesmas coisas.

Só mais um exemplo, combinando a soma. Considere a espécie $\mathcal{L}$ das ordens totais e seja $\mathcal{L}_k$ a espécie das ordens totais em conjuntos com k elementos. Destacando o "maior" elemento, depois o segundo "maior" e assim por diante, temos

$$\mathcal{L}_k = X^k.$$

(vamos usar a notação usual $\underbrace{X\cdot X\cdots X}_{k \text{ vezes}} = X^k$.)

Como $\mathcal{L}$ é a união disjunta de todos os $\mathcal{L}_k$, temos

$$\mathcal{L} = 1 + X + X^2 + \cdots .$$

Mas você também pode pensar de forma recursiva: em $\mathcal{L}$ temos a ordem no vazio $\mathbf{1}$ ou destacamos um elemento (o unitário X) e ordenamos o resto ($\mathcal{L}$ de novo):

$$\mathcal{L} = \mathbf{1} + X\cdot\mathcal{L}.$$

Acho que você deve ter notado a vantagem de usar espécies agora: elas *não usam índices*, ou seja, as *recursões agora não são equações em termos dos anteriores.* Você chega em uma equação funcional combinatória e resolve.

Observação 1. *É importante notar que, enquanto podemos dividir séries formais, "passando para o outro lado", não podemos fazer o mesmo com espécies. Ou seja, não podemos escrever* $\mathcal{D} = \frac{\mathcal{P}}{E}$ *ou, por mais que dê vontade,* $\mathcal{L} = \frac{\mathbf{1}}{1-X}$. *Na verdade, existem o que chamamos de* espécies virtuais*, que surgem daí e não necessariamente têm significado combinatório.*

5.3 Composição

E a composição? Como interpretar composição de espécies? Para definir $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$, precisamos ter $\mathcal{G}[\emptyset] = \emptyset$. Mas o resto é razoavelmente natural:

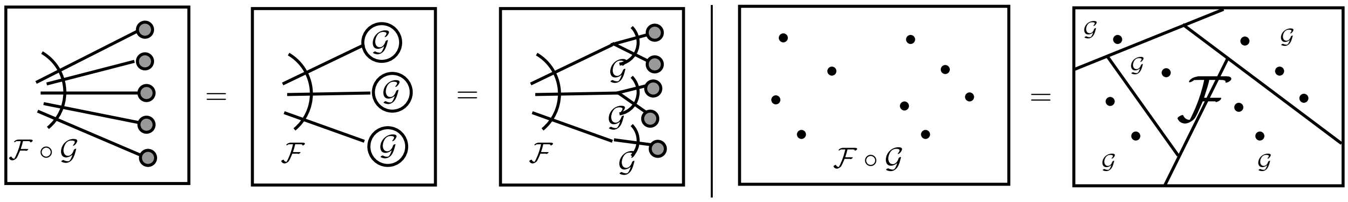
- Sendo U um conjunto de rótulos, $(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})[U]$ é

  $$\{(s,T) : s\in\mathcal{F}[T] \text{ e } T \text{ é um conjunto de } \mathcal{G}\text{-estruturas cujos conjuntos de rótulos particionam } U.\}$$

- O transporte é mais difícil de descrever do que de explicar: sendo $(s,T)\in\mathcal{F}\circ\mathcal{G}[U]$, para cada $t\in T$ seja σ_t a restrição de σ no conjunto de rótulos de t. Defina então a função τ em T por $\tau(t) = \mathcal{G}[\sigma_t](t)$ (o que é essencialmente uma "transferência de transporte"), e então

  $$(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})[\sigma](s) = \mathcal{F}[\tau](s);$$

As figuras a seguir explicam melhor o que está acontecendo: dividimos U em blocos, colocamos uma $\mathcal{G}$-estrutura em cada bloco e tomamos os blocos e fazemos uma $\mathcal{F}$-estrutura nos blocos. Dá para ver que isso é útil, né?



Note que por isso $\mathcal{G}[\emptyset] = \emptyset$ é necessário: se não, podemos juntar um monte de vazios e colocar estruturas, e $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ fica mal definido.

As funções geratrizes não se comportam tão bem assim:

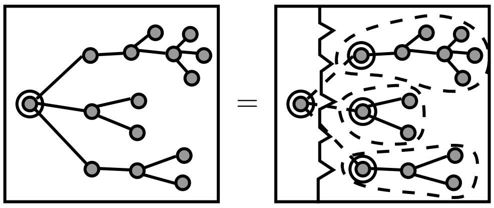
- As exponenciais funcionam bem:
$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(x) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(x)).$$
Usando o que sabemos de soma e multiplicação, a demonstração é mais simples do que parece. Fixe a quantidade k de blocos e sejam $U_1, U_2, \ldots, U_k$ os blocos. Há $|\mathcal{F}[k]|$ maneiras de colocar uma $\mathcal{F}$-estrutura nos blocos e fazemos o produto de k $\mathcal{G}$-estruturas: obtemos a função geratriz exponencial $|\mathcal{F}[k]|(\mathcal{G}(x))^k$. Falta ainda dividir por $k!$, já que temos de tirar a ordem da partição de blocos: $|\mathcal{F}[k]|\frac{(\mathcal{G}(x))^k}{k!}$. Somando tudo sobre k, obtemos
$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(x) = \sum_{k \geq 0} |\mathcal{F}[k]| \frac{(\mathcal{G}(x))^k}{k!} = \mathcal{F}(\mathcal{G}(x)).$$
- Agora, quando temos tipo o negócio já não funciona. Em geral, $(\widetilde{\mathcal{F} \circ \mathcal{G}})(x) \neq \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{G}}(x)$. Aqui precisamos da série de índices de ciclos:
$$(\widetilde{\mathcal{F} \circ \mathcal{G}})(x) = Z_{\mathcal{F}}\left(\tilde{\mathcal{G}}(x), \tilde{\mathcal{G}}(x^2), \tilde{\mathcal{G}}(x^3), \ldots\right)$$
- As duas fórmulas anteriores são obtidas da seguinte identidade, que é difícil de provar (veja [2], capítulo 4, para uma demonstração):
$$Z_{\mathcal{F} \circ \mathcal{G}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = Z_{\mathcal{F}}\left(Z_{\mathcal{G}}(x_1, x_2, x_3, \ldots), Z_{\mathcal{G}}(x_2, x_4, x_6, \ldots), Z_{\mathcal{G}}(x_3, x_6, x_9, \ldots), \ldots\right)$$

As propriedades são as mesmas da composição, e vale a pena destacar também que

- $(\mathcal{F} + \mathcal{G}) \circ \mathcal{H} = \mathcal{F} \circ \mathcal{H} + \mathcal{G} \circ \mathcal{H}$;
- $(\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}) \circ \mathcal{H} = (\mathcal{F} \circ \mathcal{H}) \cdot (\mathcal{G} \circ \mathcal{H})$.
- $\mathcal{F} \circ X = X \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

Vejamos alguns exemplos: uma permutação é um conjunto de ciclos (veja de novo como um grafo), logo se $\mathcal{C}$ é a espécie dos ciclos, $\mathcal{P} = E \circ \mathcal{C}$. Com isso, podemos achar a função geratriz exponencial de $\mathcal{C}$:
$$\mathcal{P}(x) = E(\mathcal{C}(x)) \iff \frac{1}{1-x} = e^{\mathcal{C}(x)} \iff \mathcal{C}(x) = -\ln(1-x)$$
Abrindo a série, temos
$$\mathcal{C}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n},$$
o que comprova que $|\mathcal{C}[n]| = (n-1)!$.

Mais um exemplo: seja $\mathcal{A}$ a espécie das árvores enraizadas (uma árvore com um vértice destacado). Para termos uma árvore, destacamos um vértice (X), o tiramos e obtemos um conjunto de árvores enraizadas, com raízes nos vizinhos do vértice retirado ($E \circ \mathcal{A}$). Obtemos, então
$$\mathcal{A} = X \cdot (E \circ \mathcal{A}).$$



Com isso, temos $\mathcal{A}(x) = xe^{\mathcal{A}}$, e ao resolver a equação é possível achar a quantidade de árvores enraizadas com rótulos. Podemos fazer isso com a *fórmula de inversão de Lagrange*. Antes de chegar na fórmula, um lema.

Lema 1 (Extração de coeficientes)**.** *Seja $f(x)$ uma série formal com $[1]f(x) = 0$ e $[x]f(x) \neq 0$. Então, para i inteiro,*

$$[x^{-1}](f(x))^i f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = -1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(aqui, estendemos a ideia de séries formais para ter expoentes negativos)

Demonstração: Caso $i \neq -1$, note que $(f(x))^i f'(x)$ é a derivada de $\frac{(f(x))^{i+1}}{i+1}$, que é uma série formal e não gera termo em x^{-1} quando é derivado.

Se $i = -1$, é só abrir a conta: sendo $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a_1 + 2a_2 x + \cdots}{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots} = \frac{a_1 + 2a_2 x + \cdots}{a_1 x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}x + \frac{a_3}{a_1}x^2 + \cdots\right)}$$

$$= \left(x^{-1} + \frac{2a_2}{a_1} + \frac{3a_3}{a_1}x + \cdots\right) \cdot \left(1 + \sum_{k \geq 1} \left(-x\left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1}x + \cdots\right)\right)^k\right)$$

e o resultado segue. □

Agora vamos à inversão.

Teorema 2 (Teorema da inversão de Lagrange-Burmann)**.** *Sejam f, g séries com $[1]f(x) = [1]g(x) = 0$ e $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Então*

$$[x^n]g(x) = \frac{1}{n}[x^{-1}]\frac{1}{(f(x))^n}.$$

Em particular, se $f(x) = x/\phi(x)$ e (consequentemente) $g(x) = x\phi(g(x))$,

$$[x^n]g(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}](\phi(x))^n.$$

Demonstração: Sendo $g(x) = \sum_{i \geq 1} b_i x^i$. Então, substituindo f e derivando,

$$g(f(x)) = x \iff \sum_{i \geq 1} b_i (f(x))^i = x \implies \sum_{i \geq 1} i b_i (f(x))^{i-1} f'(x) = 1.$$

Para usar o lema eficientemente, queremos pensar só no termo nb_n, que deve estar multiplicado por $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Como agora o termo é $nb_n(f(x))^{n-1}f'(x)$, dividimos por $(f(x))^n$:

$$\sum_{i \geq 1} i b_i (f(x))^{i-1-n} f'(x) = \frac{1}{(f(x))^n}$$

Aplicando o lema, ao procurar o termo em x^{-1} todos os termos cancelam, exceto nb_n. Logo

$$nb_n = [x^{-1}]\frac{1}{(f(x))^n} \iff [x^n]g(x) = \frac{1}{n}[x^{-1}]\frac{1}{(f(x))^n}.$$

Para a segunda parte, se $f(x) = x/\phi(x)$, $f(g(x)) = x \iff g(x)/\phi(g(x)) = x \iff g(x) = x\phi(g(x))$. Mas $[x^{-1}]h(x) = [x^{n-1}]x^n h(x)$ para toda série h, logo aplicando o que acabamos de provar temos

$$[x^n]g(x) = \frac{1}{n}[x^{-1}]\frac{1}{(f(x))^n} = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\frac{x^n}{(x/\phi(x))^n} = \frac{1}{n}[x^{n-1}](\phi(x))^n.$$

□

Voltando ao problema das árvores, temos

$$\mathcal{A}(x) = xe^{\mathcal{A}(x)} \iff \mathcal{A}(x)e^{-\mathcal{A}(x)} = x.$$

Sendo $f(x) = xe^{-x}$, queremos calcular sua inversa. Note que $f(x) = x/e^x$, então aplicando a fórmula para $\phi(x) = e^x$ temos

$$[x^n]\mathcal{A}(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}](e^x)^n = \frac{1}{n}[x^{n-1}]e^{nx} = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\sum_{k\geq 0}\frac{(nx)^k}{k!} = \frac{n^{n-1}}{n(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

de modo que o número de árvores enraizadas rotuladas é n^{n-1}.

5.4 Derivada e apontando

Ao derivar (formalmente) a função geratriz exponencial, obtemos

$$\mathcal{F}'(x) = \sum_{n\geq 1}|\mathcal{F}[n]|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0}|\mathcal{F}[n+1]|\frac{x^n}{n!}.$$

Isso sugere que a quantidade de $\mathcal{F}'$-estruturas em U seja igual à quantidade de $\mathcal{F}$-estruturas em U com um elemento "novo" inserido. Com isso, definimos a *derivada de uma espécie* como a espécie com $\mathcal{F}$-estrutura em $U^+ = U \cup \{*\}$, sendo $* = *_U$ escolhido fora de U. Temos

$$\mathcal{F}'[U] = \mathcal{F}[U^+].$$

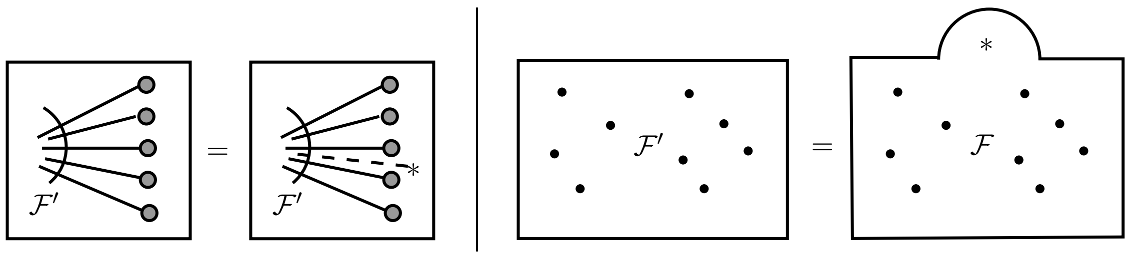
O transporte é o mesmo, só que ele mantém $*$:

$$\mathcal{F}'[\sigma] = \mathcal{F}[\sigma^+]$$

em que $\sigma^+ \colon U^+ \to V^+$ é definido por $\sigma^+(u) = \sigma(u)$ para $u \in U$ e $\sigma^+(*) = *$.

Em resumo: $\mathcal{F}'$ é a espécie com um rótulo $*$ a mais (que normalmente é ignorado mais tarde, como veremos nos exemplos).

As figuras a seguir mostram a ideia de derivada:

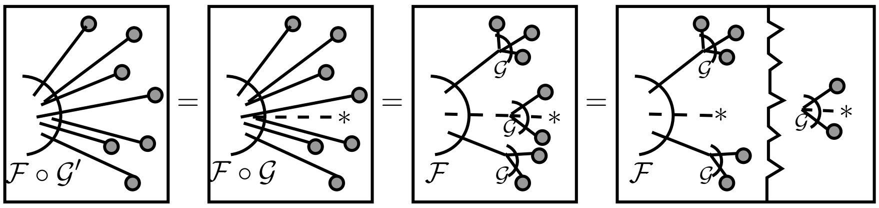


Quanto às séries, temos

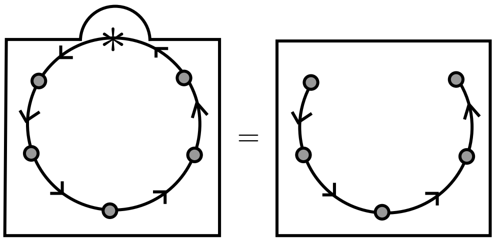
- $\mathcal{F}'(x)$ é a derivada de $F(x)$.
- $\tilde{\mathcal{F}}'(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}Z_{\mathcal{F}}(x, x^2, x^3, \ldots)$.
- $Z_{\mathcal{F}'}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \frac{\partial}{\partial x_1}Z_{\mathcal{F}}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

As derivadas de espécies têm propriedades semelhantes às das derivadas de Cálculo:

- $(\mathcal{F}+\mathcal{G})' = \mathcal{F}' + \mathcal{G}'$. Isso fica para o leitor provar (é bem tranquilo!).
- $(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G})' = \mathcal{F}'\cdot\mathcal{G} + \mathcal{F}\cdot\mathcal{G}'$. De fato, na hora de particionar, o $*$ pode ir para o lado do $\mathcal{F}$ ou do $\mathcal{G}$, mas não de ambos.
- $(\mathcal{F}\circ\mathcal{G})' = (\mathcal{F}'\circ\mathcal{G})\cdot\mathcal{G}'$. De fato, o $*$ vai para um rótulo em alguma $\mathcal{G}$-estrutura; particionando e identificando o $*$, isso é o mesmo que separar a $\mathcal{G}$-estrutura com $*$ (formando uma $\mathcal{G}'$-estrutura) e montar uma estrutura $\mathcal{F}'\circ\mathcal{G}$. A figura a seguir mostra isso melhor:



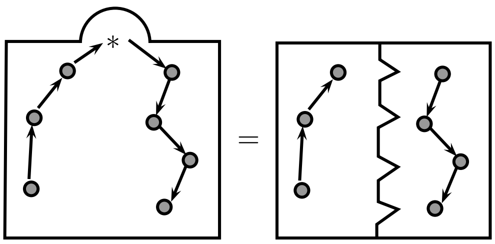
Vejamos alguns exemplos: tome a espécie $\mathcal{C}$ dos ciclos. Ao derivar, obtemos ciclos com um $*$ a mais. "Recortando" ele, obtemos uma ordem total! Assim, $\mathcal{C}' = \mathcal{L}$.



Com isso, podemos encontrar $\mathcal{C}(x)$ de novo:

$$\mathcal{C}'(x) = \mathcal{L}(x) = \frac{1}{1-x} \implies \mathcal{C}(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x).$$

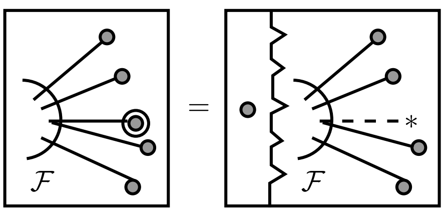
Agora, se derivarmos de novo, obtemos $\mathcal{C}'' = \mathcal{L}' = \mathcal{L}^2$:



Isso condiz com o fato de que a derivada de $\frac{1}{1-x}$ é $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Por fim, mostramos a operação "apontar", que transforma uma espécie em uma espécie com um elemento destacado: para tanto, derivamos para obter o $*$ e o destacamos com X: definimos

$$\mathcal{F}^\bullet = X\cdot\mathcal{F}'.$$



Por exemplo, sendo $\mathbf{a}$ a espécie das árvores, $\mathbf{a}^\bullet = X \cdot \mathbf{a}'$ são as árvores enraizadas, ou seja, $\mathcal{A} = \mathbf{a}^\bullet$.

Há várias aplicações interessantes. Uma delas é quando uma estrutura $\mathcal{F}$ é um conjunto de estruturas conexas $\mathcal{F}^c$, ou seja, $\mathcal{F} = E \circ \mathcal{F}^c$. Se quisermos contar a quantidade média de $\mathcal{F}^c$-estruturas por $\mathcal{F}$-estruturas, podemos fazer o seguinte: uma $\mathcal{F}^c$-estrutura pode ser apontada em uma $\mathcal{F}$-estrutura, ou seja, fazemos $E^\bullet \circ \mathcal{F}^c$ (note que estamos apontando uma $\mathcal{F}^c$-estrutura, por isso o operador $^\bullet$ é só no E). Desta forma, $|E^\bullet \circ \mathcal{F}^c[n]|$ é a quantidade de $\mathcal{F}$-estruturas em n elementos com uma $\mathcal{F}^c$-estrutura marcada. Mas isso soma cada $\mathcal{F}$-estrutura vezes a quantidade de $\mathcal{F}^c$ que ela tem! Então a média de $\mathcal{F}^c$-estruturas por $\mathcal{F}$-estrutura é

$$\kappa_n(\mathcal{F}) = \frac{|E^\bullet \circ \mathcal{F}^c[n]|}{|\mathcal{F}[n]|}.$$

Também podemos quebrar em uma $\mathcal{F}^c$-estrutura e botar uma $\mathcal{F}$-estrutura no resto:

$$\kappa_n(\mathcal{F}) = \frac{|\mathcal{F}^c \cdot \mathcal{F}[n]|}{|\mathcal{F}[n]|}.$$

De fato, em termos de funções geratrizes, sendo $E^\bullet = X \cdot E' = X \cdot E$,

$$(x \cdot E)(\mathcal{F}^c(x)) = \mathcal{F}^c(x) \cdot E(\mathcal{F}^c(x)) = \mathcal{F}^c(x) \cdot \mathcal{F}(x) = (\mathcal{F}^c \cdot \mathcal{F})(x).$$

Por exemplo, vamos calcular a quantidade média de ciclos em permutações de n elementos, lembrando que $\mathcal{P} = E \circ \mathcal{C}$. Aplicando a fórmula, temos

$$\mathcal{C}(x) \cdot \mathcal{F}(x) = \sum_{n \ge 1} \frac{x^n}{n} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Sabemos que multiplicar por $\frac{1}{1-x}$ nos fornece a soma parcial dos coeficientes, logo

$$[x^n](\mathcal{C}(x) \cdot \mathcal{P}(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Com isso, $|\mathcal{C} \cdot \mathcal{P}[n]| = n! \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ e, dividindo por $|\mathcal{P}[n]| = n!$, obtemos que a média da quantidade de ciclos em permutações é

$$\kappa_n(\mathcal{P}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln n.$$

6 Transformando ideias combinatórias em contas

Vamos resumir as ideias com operações com espécies aqui:

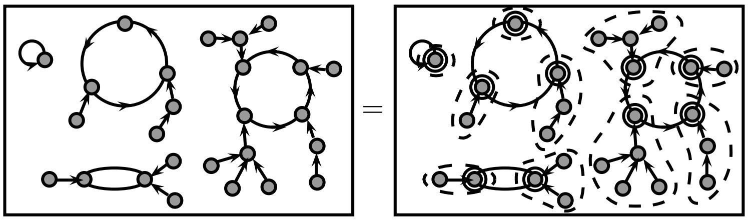
- A *adição* $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ de espécies faz a união disjunta de duas estruturas com $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ no mesmo conjunto de rótulos. Se houver interseção, você pode imaginar as $\mathcal{F}$-estruturas pintadas de uma cor e as $\mathcal{G}$-estruturas pintadas de outra cor.
- O *produto* $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}$ de espécies enumera todas as possibilidades de particionar um conjunto em duas partes e colocar uma $\mathcal{F}$-estrutura em uma parte e uma $\mathcal{G}$-estrutura na outra.
- A *composição* $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ de espécies é uma $\mathcal{F}$-estrutura de $\mathcal{G}$-estruturas.
- A *derivada* $\mathcal{F}'$ de espécie é uma $\mathcal{F}$-estrutura com um elemento adicional $*$, que geralmente é "cortado".
- A *apontada* $\mathcal{F}^\bullet$ de espécie é uma $\mathcal{F}$-estrutura com um elemento marcado.

Com isso, podemos transformar sentenças em equações!

Sentença	Equação
Um conjunto tem uma quantidade par ou ímpar de elementos	$E = E_p + E_i$
Uma permutação é um conjunto de ciclos	$\mathcal{P} = E \circ \mathcal{C}$
Uma permutação pode ser particionada em pontos fixos e uma desarrumação	$\mathcal{P} = E \cdot \mathcal{D}$
Uma floresta é um conjunto de árvores	$\mathbf{Fl} = E \circ \mathbf{a}$
Para obter um subconjunto, separamos um conjunto de outro	$\mathbf{Sub} = E \cdot E$

Para terminar, vamos provar mais uma vez que a quantidade de árvores com n vértices rotulados é n^{n-2}.

Primeiro, considere a espécie **End** das *endofunções*, ou seja, $\mathbf{End}[U]$ são as funções $f\colon U \to U$. Sabemos que $|\mathbf{End}[n]| = n^n$. Pensando no grafo direcionado com vértices em U e arestas $u \to f(u)$ de cada endofunção, obtemos vários ciclos com árvores enraizadas no ciclo:



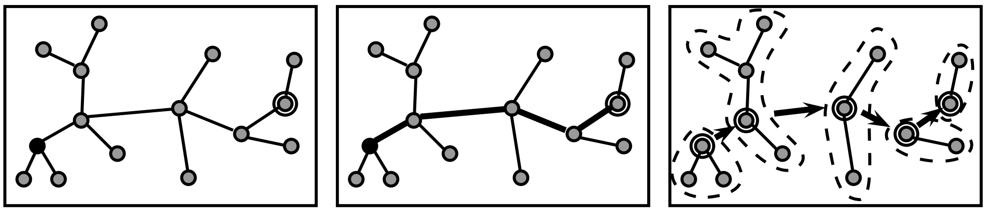
Logo, lembrando que uma permutação é um conjunto de ciclos, $\mathbf{End} = \mathcal{P} \circ \mathcal{A}$.

Agora, note que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{L}$, apesar de serem diferentes, têm a mesma função geratriz exponencial (ou seja, são *equipotentes*). Como só estamos interessados em enumerar $\mathcal{A}$, podemos escrever a *identidade de funções geratrizes*

$$\mathbf{End}(x) = \mathcal{L}(\mathcal{A}(x)).$$

Que espécie é $\mathcal{L} \circ \mathcal{A}$? Isso é uma lista de árvores enraizadas, ou seja, uma outra árvore com uma "espinha dorsal" (que é chamada de *vertebrado*). Mas isso é o mesmo que tomar uma árvore enraizada (a raiz é a ponta inicial da espinha dorsal) e destacar um vértice (que pode ser o mesmo, já que listas unitárias também estão em $\mathcal{L}$), ou seja, é $\mathcal{A}^\bullet$! Assim,

$$\mathcal{A}^\bullet = \mathcal{L} \circ \mathcal{A}.$$



Temos que $|\mathcal{A}^\bullet[n]| = n^2|\mathbf{a}[n]|$ e $|\mathcal{L} \circ \mathcal{A}[n]| = |\mathcal{P} \circ \mathcal{A}[n]| = |\mathbf{End}[n]| = n^n$, logo

$$n^2|\mathbf{a}[n]| = n^n \iff |\mathbf{a}[n]| = n^{n-2},$$

como queríamos demonstrar.

7 Isso é só o começo!

Você pode dizer que o que fizemos é essencialmente o mesmo que sistematizar e estruturas as ideias de contagem e funções geratrizes, e que a técnica não é eficiente em certas ocasiões. Isso é verdade (especialmente em termos da eficiência: afinal, o que poderia eficiente o tempo todo?). Mas o jeito que simplifica as coisas nos faz poder querer ir mais longe: há toda uma teoria de categorias que pode ser utilizada para generalizar essas estruturas e outras operações mais profundas com espécies (se estiver interessado, procure por *produto cartesiano*, *assimetria*, *espécies com peso* e $\mathbb{L}$-*espécies*.

8 Problemas

1. Dê interpretações combinatórias para as seguintes espécies:
   (a) 2
   (b) n (n inteiro positivo)
   (c) $2X$
   (d) X^2
   (e) $E \circ (2X)$
   (f) $X \cdot E$
   (g) $E \circ E^*$, $E = 1 + E^*$ (o que é E^*?)
   (h) E'

2. Descreva as seguinte espécies a partir das seis espécies dadas na seção 2. Calcule sua função geratriz exponencial (use a tabela na subseção 3.5).
   (a) Um *ranking* com seus pratos de comida favoritos, onde pode haver empates.
   (b) Elementos de um conjunto.

3. Qual é a função geratriz da espécie E_k dos conjuntos com k elementos?

4. É verdade que $2 \cdot E_2 = X^2$?

5. A partir da equação $\mathcal{P}_k = E_k \circ \mathcal{C}$ (o que é $\mathcal{P}_k$?), sendo $c(n,k)$ o número de permutações com k ciclos temos

$$\sum_{n \geq k} c(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(-\ln(1-x))^k}{k!}.$$

6. Mostre que $\tilde{\mathcal{P}}(x) \neq \tilde{E}(\tilde{\mathcal{C}}(x))$.

7. Definimos a espécie **Oct** de *polvos* como $\mathbf{Oct} = \mathcal{C} \circ \mathcal{L}^*$, sendo $\mathcal{L} = 1 + \mathcal{L}^*$.
   (a) Explique por que essa espécie tem esse nome.
   (b) Prove que $\mathbf{Oct} + \mathcal{C} = \mathcal{C} \circ (2X)$. Você também pode escrever $\mathbf{Oct}(X) + \mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(2X)$. Note também que não basta verificar se as funções geratrizes satisfazem essa conta.
   (c) Prove que $\mathbf{Oct}' = \mathcal{L} \cdot (\mathcal{L} \circ (2X))$ (ou, escrevendo de outro jeito, $\mathbf{Oct}'(X) = \mathcal{L}(X) \cdot \mathcal{L}(2X)$.
   (d) Calcule $\mathbf{Oct}(x)$ e, portanto, a quantidade de polvos com n elementos.

8. Sendo **Cat** a espécie das árvores binárias, mostre que $\mathbf{Cat} = X + \mathbf{Cat}^2$.

9. Considere a espécie **Inv** das involuções. Calcule **Inv** em termos das seis espécies primitivas e encontre sua função geratriz exponencial.

10. Dada uma espécie $\mathcal{F}$, seja $\mathcal{F}_p$ a espécie das $\mathcal{F}$-estruturas de tamanho par, ou seja, $\mathcal{F}_p[U] = \mathcal{F}[U]$ se $|U|$ é par e $\mathcal{F}_p[U] = \emptyset$ se $|U|$ é ímpar. Defina $\mathcal{F}_i$ para tamanho ímpar de modo análogo. Prove que

$$\mathcal{F}_p(x) = \frac{\mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(-x)}{2} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_i(x) = \frac{\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(-x)}{2}.$$

11. Prove que a quantidade de permutações com todos os ciclos pares tem função geratriz exponencial $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e que a quantidade de permutações com todos os ciclos ímpares tem função geratriz exponencial $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Deduza a quantidade de permutações com todos os ciclos pares.

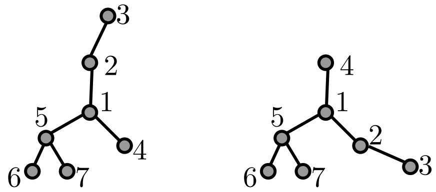
12. Quantos são os polvos com n vértices e todos os tentáculos com quantidade ímpar de vértices?

13. Sendo **Alt** a espécie das permutações alternantes, ou seja, permutações $(a_1, \ldots, a_n)$ de U com

$$a_1 < a_2 > a_3 < \ldots > a_n,$$

mostre que $\mathbf{Alt}' = 1 + \mathbf{Alt}^2$. Note que isso prova que $\mathbf{Alt}(x) = \tan(x)$.

14. Quantas são as *árvores planas rotuladas* com n vértices? Uma árvore plana rotulada é uma árvore com n vértices numerados de 1 a n com uma ordem cíclica dos ramos adjacentes a cada vértice. Por exemplo, as árvores planas rotuladas a seguir são consideradas diferentes, apesar de serem grafos isomorfos.



15. Calcule a quantidade de funções $f\colon [n] \to [n]$ tais que $f \circ f = f$.

16. Sendo $\mathcal{V}^*$ a espécie dos *vertebrados não-degenerados* (ou seja, vertebrados com pelo menos um vértice) e $\mathcal{A}^*$ a espécie das árvores não-degeneradas, prove, cortando a cabeça dos vertebrados, que $\mathcal{V}^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{V}^* \cdot \mathcal{A}^*$ e deduza a identidade

$$n^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} k^k (n-k)^{n-k-1}, \quad n \geq 1.$$

9 Referências bibliográficas

1. O resumo dessa aula se baseia em A. Hardt, P. McNeely, T. Phan, J. M. Troika, *Combinatorial Species and Graph Enumeration*, disponível em

   http://arxiv.org/abs/1312.0542

2. Se você se interessou, o livro sobre o assunto é Bergeron, F., G. Labelle, e P. Leroux. 1998. *Combinatorial species and tree-like structures.*

3. Uma versão mais resumida ainda está em Bergeron, *Algebraic Combinatorics and Coinvariant Spaces.* Ele está incompleto (partes em inglês, partes em francês, partes não escritas), mas a parte de espécies está em inglês e bem explicada.

4. Outro especialista em Combinatória Enumerativa é Peter Cameron. Algumas de suas notas de aula:

   http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/C50/no7.pdf

   http://www.ltcc.ac.uk/courses/enumerative_combinatorics/l8.pdf

   http://www.ltcc.ac.uk/courses/enumerative_combinatorics/l10.pdf

5. Tem listas e notas de aulas de cursos, como essas do professor Mark Haiman, de Berkeley (de lá tirei a demonstração da enumeração da composição e um exercício):

   http://math.berkeley.edu/~mhaiman/math172-spring10/hw13.pdf

   http://math.berkeley.edu/~mhaiman/math172-spring10/exponential.pdf

   http://math.berkeley.edu/~mhaiman/math172-spring10/trees.pdf

6. A parte de inversão de Lagrange é de Peter Magyar, da universidade de Michigan State.

   http://www.math.msu.edu/~magyar/Math880/Lagrange.pdf