Poliminós e o Tabuleiro de Xadrez

Prof. Onofre Campos (onofrecampos@secrel.com.br)
Prof. Carlos Shine (cyshine@yahoo.com)

1. O dominó

Você já deve conhecer o dominó. Não vamos pensar no jogo de dominós (embora haja problemas bastante interessantes envolvendo o jogo), mas sim nas peças, que para nós serão apenas retângulos 2×1, em qualquer posição.

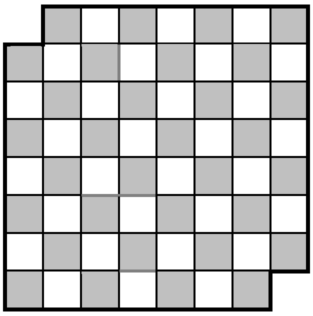
Então, para que usaremos os dominós? Nós estamos interessados em cobrir certas figuras com dominós.

1.1. Dominós e o tabuleiro de xadrez

Se removermos duas casas diagonalmente opostas de um tabuleiro de xadrez, é possível cobrir as 62 casas restantes com 31 dominós?

Tente, por um instante, cobrir o tabuleiro. Você não conseguirá fazê-lo. Isso quer dizer que não dá para cobrir? Talvez não. Você tentou todas as possibilidades? Acho difícil, pois um computador demoraria pelo menos algumas horas para fazer isso. E, além disso, é muito chato testar todas possibilidades. Mas podemos provar que não dá de outras maneiras. Para resolver problemas desse tipo, uma das técnicas mais utilizadas é pintar o tabuleiro. Vamos ver como isso funciona.

As casas do tabuleiro são pintadas alternadamente de branco e preto. Como podemos notar, um tabuleiro de xadrez, de dimensões 8×8, possui 32 casas de cada cor e duas casas diagonalmente opostas têm a mesma cor. Suponha que as duas casas removidas sejam ambas brancas. Então, o novo tabuleiro ficará com 32 casas pretas e 30 brancas.

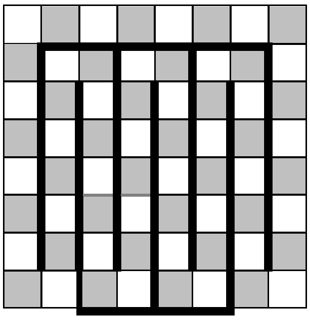


Essa pintura é bastante natural, mas como isso pode ajudar? O que realmente ajuda nessa pintura é que cada dominó cobre uma casa de cada cor! Deste modo, é impossível preenchermos o tabuleiro com dominós, já que seria necessário o mesmo número de casas de cada cor.

Neste problema, tivemos que analisar a coloração do tabuleiro. Em alguns problemas, entretanto, esta coloração das casas (alternadamente de branco e preto) não será suficiente, e teremos que arranjar outra coloração para o tabuleiro.

Agora faz sentido pensarmos em uma possível cobertura, visto que agora temos o mesmo número de casas brancas e pretas, de modo que podemos pensar na seguinte pergunta: se retirarmos casas de cores diferentes, será que ainda é possível cobrir o tabuleiro com dominós?

De fato, é possível, bastando considerarmos o seguinte tabuleiro:



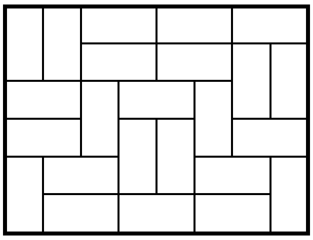
Observe que dividindo o tabuleiro dessa forma obtemos um ciclo que contém todas as casas do tabuleiro. Além disso, como as casas estão pintadas alternadamente de branco e preto, se retirarmos uma casa de cada cor, o número de quadrados ao longo do ciclo entre as duas casas removidas é par (em qualquer um dos dois sentidos que percorrermos o ciclo). Isso completa a demonstração, visto que cada dominó cobre duas casas.

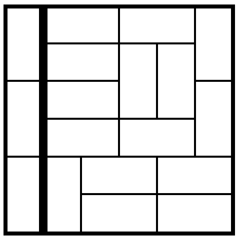
1.2. Dominós e retângulos

Vamos generalizar o que fizemos antes. Que tipos de retângulos podem ser cobertos por dominós? Ou, dizendo de forma mais precisa, para que valores inteiros de m e n podemos cobrir um retângulo de lados m e n com dominós?

Dividindo o retângulo em mn quadradinhos unitários e notando que cada dominó ocupa dois quadradinhos unitários, vemos que a resposta a essa pergunta não é difícil: m ou n deve ser par. Por outro lado, não é difícil cobrir um tabuleiro que satisfaz essas condições: supondo que m é par, basta cobrir cada coluna de tamanho m com $m/2$ dominós.

Vamos fazer uma pergunta um pouco mais interessante. Uma cobertura de um tabuleiro com dominós (ou qualquer tipo de peça) é chamada de *sem quebras* quando não existe nenhuma reta que corta o tabuleiro mais não corta nenhuma peça. Em outras palavras, dá para "separar" o tabuleiro em dois. A seguir, uma cobertura de um retângulo 6×8 sem quebras e uma cobertura de um retângulo com quebras:





Agora a nossa pergunta é: *quais retângulos admitem alguma cobertura com dominós **sem quebras**?* Isso vai ser respondido nos próximos exercícios:

Exercícios

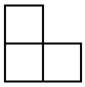
1. Encontre uma cobertura sem quebras de um retângulo 5×6 por dominós.
2. Mostre como obter uma cobertura sem quebras de um retângulo 6×10 por dominós. Generalize.
3. Mostre que não é possível obter uma cobertura sem quebras de um retângulo $2 \times n$ com dominós.
4. Mostre que não é possível obter uma cobertura sem quebras de um retângulo $3 \times n$ com dominós.
5. Mostre que não é possível obter uma cobertura sem quebras de um retângulo $4 \times n$ com dominós.
6. Mostre que *não é possível* obter uma cobertura sem quebras de um retângulo 6×6 com dominós. *Dica: há 10 possíveis linhas de quebras; se não houver quebras, pelo menos quantos dominós cada linha deve cortar? Será que há dominós suficientes?*

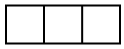
Se você fez tudo certo você provou:

Teorema. *Um retângulo $m \times n$ admite uma cobertura sem quebras com dominós se, e somente se*
(a) mn é par;
(b) $m \geq 5$;
(c) $n \geq 5$;
(d) não ocorre $m = n = 6$.

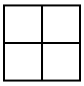
2. Poliminós

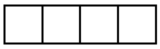
Suponha, agora, que ao invés de dominós tenhamos *poliminós*, que são peças obtidas unindo-se quadrados 1×1 lado a lado. Por exemplo, podemos formar *triminós*

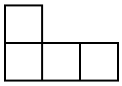

L-triminó

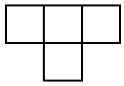

Triminó reto

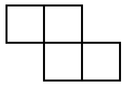
Ou ainda, *tetraminós* como na figura a seguir:


Quadrado


Tetraminó reto


L-tetraminó


T-tetraminó


Z-tetraminó

Os *pentaminós* são, em número, 12 e os *hexaminós* 35. Em geral, se $n \geq 7$, o número de n-minós aumenta muito, e além disso não se conhece uma fórmula para calculá-los. Para se ter uma idéia, existem 108 poliminós de ordem 7 (com 7 quadradinhos), 369 poliminós de ordem 8, 1.285 poliminós de ordem 9, 4.655 poliminós de ordem 10 e 192.622.052 poliminós de ordem 18.

Problema em aberto. *Encontrar uma fórmula para a quantidade de n-minós para todo n natural.*

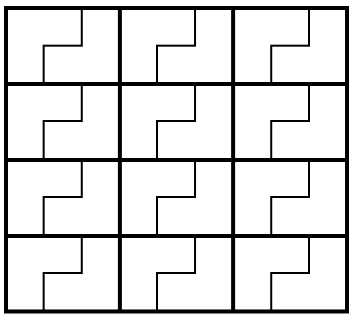
3. Triminós

Como vemos acima, há dois triminós diferentes: o L-triminó e o triminó reto. Fica como exercício descobrir quais retângulos podem ser cobertos por triminós.

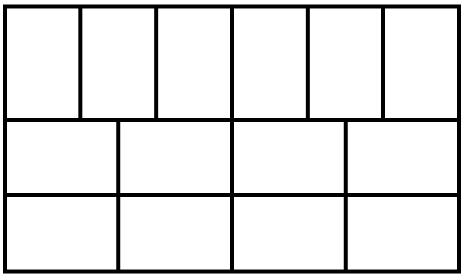
3.1. O L-triminó

Você já deve ter percebido que essa última tarefa é fácil. Basta usar triminós retos! Mas, e se não pudermos utilizar triminós retos, ou seja, só utilizarmos L-triminós? Que retângulos podemos cobrir?

Sendo o retângulo $m \times n$, como cada triminó ocupa 3 quadradinhos, é fácil ver que 3 divide mn e, portanto, m ou n. Para facilitar, vamos supor que divide n. Quando m é par, a cobertura pode ser feita com retângulos 2×3 formados com dois triminós pois m é divisível por 2 e n é divisível por 3. Abaixo, a título de exemplo, cobrimos um retângulo 8×9.



Quando n é múltiplo de 6 e m é ímpar maior que 1, podemos cobrir as três primeiras linhas com retângulos 3×2 e as demais com retângulos 2×3. Veja um retângulo 7×12:



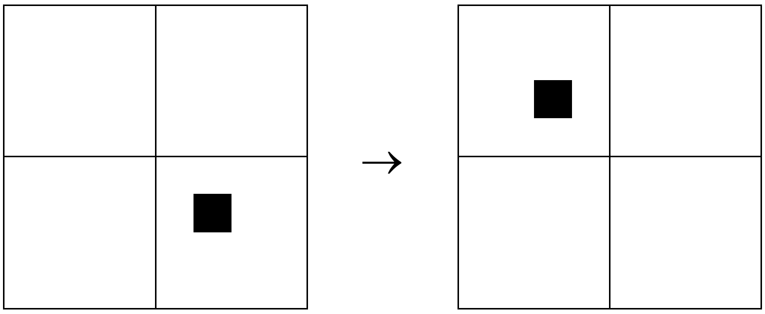
Quando ambos *m* e *n* são ímpares, temos um pouco mais de trabalho. Primeiro, vamos estudar casos pequenos.

7. Prove que não é possível cobrir um retângulo 3×3 com L-triminós.
8. É possível cobrir um retângulo 5×3 com L-triminós?
9. E um retângulo $m \times 3$, é possível?
10. O próximo ímpar múltiplo de 3 é 9; vamos então para o nosso próximo caso: encontre uma maneira de cobrir um retângulo é 5×9 com L-triminós (é possível, sim, mas não é tão imediato!).
11. Conclua o problema: quais são os retângulos que podem ser cobertos por L-triminós?

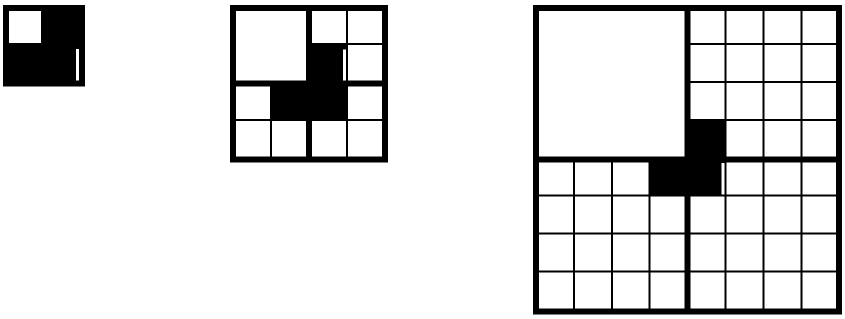
Vamos momentaneamente estudar quadrados. Quais quadrados podem ser cobertos por L-triminós? Seja *n* o lado do quadrado. O caso em que *n* é divisível por 3 é um caso particular do que acabamos de estudar. Se *n* não é divisível por 3, não podemos cobrir o quadrado com L-triminós. Mas e se permitirmos usar, além dos L-triminós, um único monominó? E quais são as possíveis posições do monominó?

Pense no caso $n = 2$. Simples, não? E o caso 4×4? Esse é um pouquinho mais complicado. 8×8? Esse é grande! Vamos ter que testar todas as possíveis posições do monominó?

Bom, primeiro, podemos ver podemos reduzir as posições para aproximadamente 1/4 dos casos. Dada uma cobertura, basta girar o quadrado de modo que o monominó fique na região superior esquerda do quadrado:

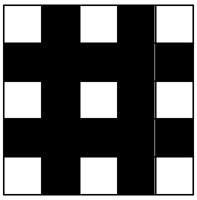


Na verdade, para *n* igual a uma potência de 2 é possível preencher o tabuleiro com L-triminós e um monominó, sendo que o monominó fica aonde a gente quiser! O caso $n = 2$ é simples. Para o caso $n = 4$, divida o quadrado em quatro quadrados menores e congruentes. podemos supor que o monominó fica no quadrado superior esquerdo. Sabemos preencher essa região. Agora, colocamos um L-trominó ocupando um quadradinho de cada um dos outros três quadrados. Também sabemos preencher essas três regiões! E note que podemos fazer o mesmo para $n = 8$, $n = 16$, e qualquer potência de 2.



Os próximos exercícios vão responder o caso geral.

12. Mostre que se é possível preencher um quadrado de lado n então é possível preencher um quadrado de lado $n + 6$ para $n \geq 6$.
13. Infelizmente, no caso $n = 5$, não podemos escolher qualquer lugar do quadrado. Mostre como preencher o quadrado quando o monominó está em uma das casas brancas. Prove que não é possível preencher o quadrado quando o monominó está em uma das casas pretas.



14. Estude os casos $n = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10$ e 11 (veja que já estudamos a maioria dos casos; você precisa estudar, no fundo, 3 casos). Conclua o problema.

Fazendo esses três últimos exercícios você provou o seguinte

Teorema. *Para $n \geq 2$, um quadrado de lado n pode ser coberto com L-triminós e no máximo um monominó, exceto quando $n = 3$; se 3 não divide n, então podemos colocar o monominó em qualquer posição, a não ser que $n = 5$.*

3.2. O triminó reto

Não é muito difícil cobrir um quadrado de lado divisível por 3 com triminós retos. Mas podemos fazer a mesma pergunta da seção anterior: se n não for múltiplo de 3 e dispusermos de um monominó e de muitos triminós retos, é possível cobrir um quadrado de lado n? Quais são as possíveis posições do monominó?

Tirando os casos óbvios $n = 1$ e $n = 2$, a resposta é sim, é possível. Você deve provar isso no próximo exercício.

15. Mostre que é possível cobrir um quadrado de lado n, $n \geq 3$, com triminós retos e no máximo um monominó.

Em compensação, o monominó não pode ser colocado em qualquer posição. Isso pode ser demonstrado com uma pintura.

Você pode se perguntar duas coisas em problemas de cobrir figuras com poliminós:

a) Como vou saber se é possível ou não?
b) Como vou fazer a pintura?

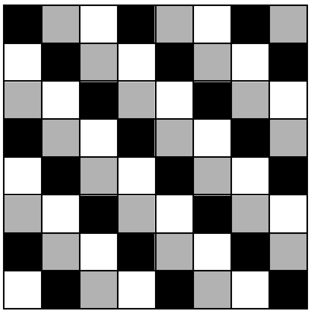
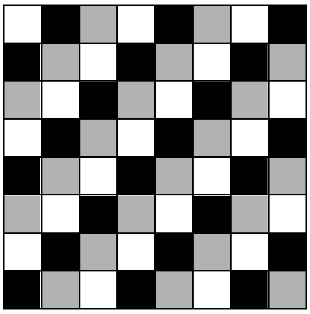
Essas duas perguntas, na verdade, não são fáceis. Em alguns problemas, nem mesmo os matemáticos especialistas nesse assunto sabem resolver o item (a). E às vezes a resposta para o item (a) é "não" mas não existe nenhuma pintura que prove que não é possível. Então, mesmo o item (b) pode ser bastante difícil.

Mas, em se tratando de problemas de olimpíada de matemática, as respostas costumam ser:

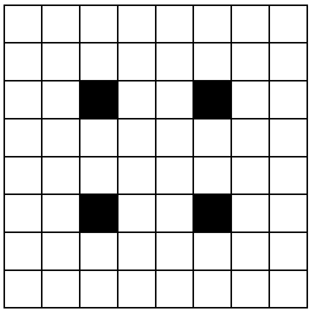
a) Você deve tentar vários casos particulares; isso deve dar dicas de se é possível ou não.
b) Isso costuma variar. A pintura deve refletir o formato dos poliminós envolvidos e da figura a ser preenchida.

Vamos resolver o problema para um quadrado de lado 8.

Nesse problema, o poliminó em questão é o triminó reto. Assim, devemos considerar uma pintura que leve isso em conta. Observando que o triminó ocupa três quadradinhos, parece interessante (e sensato) pensar em pinturas de três cores. E podemos fazer com que cada triminó reto tenha uma casa de cada cor: basta que cada três quadrados vizinhos tenham as três cores. Chegamos, assim, às seguintes duas pinturas:

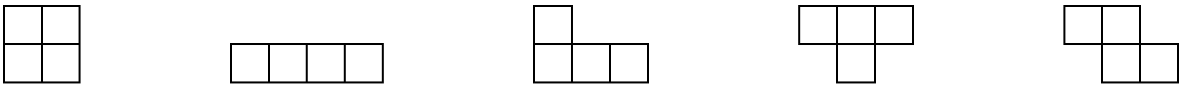
Contando o número de quadradinhos de cada cor, vemos que em ambas as pinturas há 22 quadradinhos pretos, 21 quadradinhos cinzas e 21 quadradinhos brancos. Como cada triminó reto ocupa um quadradinho de cada cor, o monominó só pode ficar sobre um quadradinho preto em ambas as pinturas, ou seja, nas casinhas marcadas a seguir:



16. Suponha que colocamos o monominó em um dos quadradinhos pretos. Encontre uma maneira de cobrir o quadrado com triminó reto.
17. Generalize o que acabamos de provar para um quadrado de lado n não divisível por 3.

4. Tetraminós

Os tetraminós são esses:

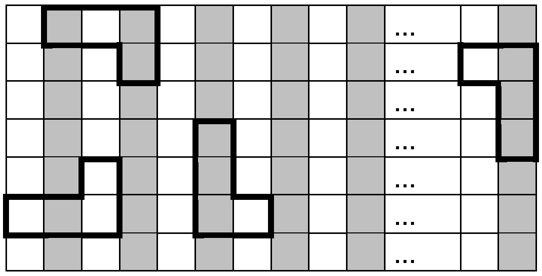


Quadrado *Tetraminó reto* *L-tetraminó* *T-tetraminó* *Z-tetraminó*

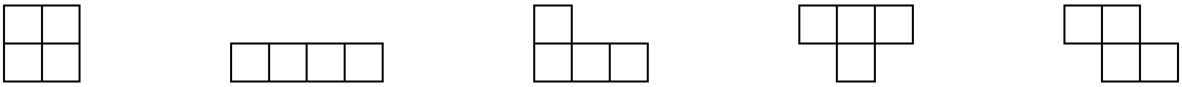
Como afirmamos antes, uma condição necessária para que haja uma cobertura de um tabuleiro com n-minós é que o número de casas do tabuleiro seja múltiplo de n. No entanto, esta condição não é suficiente, como mostra o próximo teorema.

Teorema. *Sejam m e n inteiros maiores que 1. Se um tabuleiro de dimensões $m \times n$ pode ser coberto com L-tetraminós então mn é múltiplo de 8.*

Suponha que o tabuleiro possua m linhas e n colunas e que haja uma cobertura com L-tetraminós. Como cada L-tetraminó possui 4 casas, então o número de casas do tabuleiro deve ser múltiplo de 4. Logo, m e n não podem ser ambos ímpares. Suponha que n seja par. Então o tabuleiro possui um número par de colunas. Vamos pintar as colunas alternadamente de branco e preto (Fig. 07). O interessante desta idéia é que independente de como as peças são colocadas, cada peça cobre exatamente 3 casas de uma cor e uma casa da outra. Sejam b e p, respectivamente, as quantidades de peças que cobrem exatamente 3 casas brancas e 3 casas pretas. Como o número de casas brancas é igual ao número de casas pretas (porque há tantas colunas brancas quanto pretas), o número de casas brancas é igual a $3b + p$ e o número de casas pretas e igual a $3p + b$, devemos ter $3b + p = 3p + b$, de onde concluímos que $b = p$. Isso significa dizer que temos um número par de L-tetraminós, cada um dos quais com 4 casas. Logo o tabuleiro deve ter um número de casas múltiplo de 8.



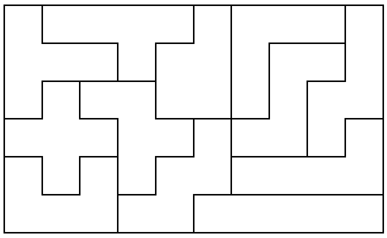
18. Prove a recíproca do último teorema.
19. Determine os retângulos que podem ser cobertos com T-tetraminós.
20. Mostre que não é possível cobrir um retângulo com Z-tetraminós.
21. Prove que os retângulos que podem ser cobertos com tetraminós retos devem ter pelo menos uma de suas dimensões múltipla de 4.
22. Prove a generalização desse último fato: os retângulos que podem ser cobertos com *n*-minós retos devem ter pelo menos uma de suas dimensões múltipla de *n*.
23. É possível cobrir um quadrado de lado 8 com:
    a) um tetraminó quadrado e 15 T-tetraminós?
    b) um tetraminó quadrado e cada um dos outros 15 sendo um Z-tetraminó ou um tetraminó reto?
24. É possível formar um retângulo usando os cinco tetraminós da figura abaixo?



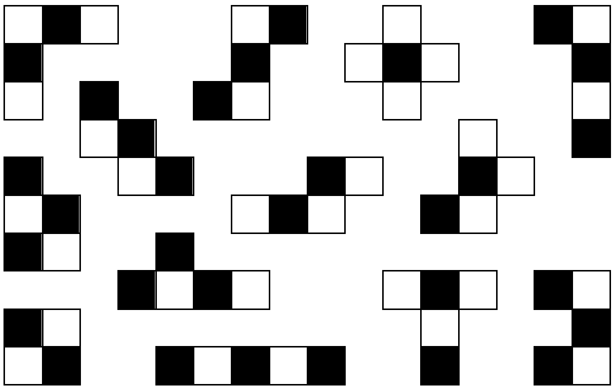
25. Uma sala de forma retangular está sendo ladrilhada com cerâmicas em forma de retângulos 2×2 e 1×4. Um das cerâmicas quebrou, de modo que só é possível substituí-la por uma do outro tipo. Mostre que é impossível ladrilhar novamente a sala rearranjando as cerâmicas.

5. Pentaminós: alguns problemas

Os 12 pentaminós estão na figura a seguir. Veja que eles podem montar um retângulo 6×10.

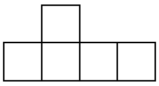


26. Um tabuleiro de xadrez foi quebrado em 13 pedaços, como mostra a figura a seguir. Mostre como montar o tabuleiro.



27. Mostre como cobrir com os doze pentaminós um retângulo:
    a) 5×12; b) 4×15 c) 3×20.
28. Mostre que não é possível usar os doze pentaminós para cobrir simultaneamente três retângulos 4×5. *Dica: considere o pentaminó com formato de +.*

29. Esse é um desafio: encontre uma maneira de cobrir um retângulo 5×10 com o Y-pentaminó:

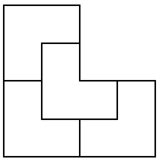


6. Reptiles

Vamos ter uma aula de Biologia? Não, de Inglês! O nome *reptiles* vem de *repeat* (repetir) + *tile* (a parte da Matemática que estuda coberturas de poliminós é *tiling theory*, em inglês).

Trocando em miúdos (e definições): um polígono tal que k de suas cópias cobrem um polígono semelhante é chamado de *reptile de ordem k* se $k > 1$. Podemos abreviar um pouco isso dizendo "*rep k*" em vez de reptile de ordem k.

Por exemplo, o L-triminó é *rep* 4:



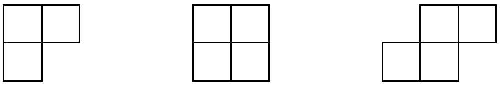
30. Prove que o L-triminó é, na verdade, *rep* k^2 para todo k inteiro positivo, $k > 1$. *Dica: veja a seção sobre cobrir quadrados com L triminós.*
31. Prove que o T-tetraminó não é *rep* 4 nem *rep* 9, mas é um reptile.
32. Prove que o Z-tetraminó é o único tetraminó que não é um reptile.
33. Quatro dos pentaminós são reptiles. Quais são eles?

Ao resolver esses problemas, você deve ter percebido que para formar um reptile é mais fácil tentar cobrir um retângulo com o poliminó, depois formar um quadrado e depois, com várias cópias desse quadrado maior, remontar o poliminó. Será que existe algum poliminó que é reptile mas não cobre nenhum retângulo? Na verdade, ninguém sabe responder.

Problema em aberto. *Existe algum poliminó que é reptile mas não cobre nenhum retângulo?*

7. Outros problemas sobre poliminós, tabuleiros e afins

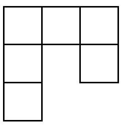
34. É possível empacotar 250 tijolos de dimensões $1 \times 1 \times 4$ em uma caixa de dimensões $10 \times 10 \times 10$?
35. Um quadrado 7×7 é cortado em figuras de três tipos:



(1) (2) (3)

Prove que dentre essas figuras há exatamente uma consistindo de quatro quadradinhos.

36. Sobre cada casa de um tabuleiro 8×8 escrevemos um número de modo que a soma dos números de todas as casas vizinhas de cada casa do tabuleiro seja igual a 1. (Duas casas são vizinhas se possuem um lado em comum). Determine a soma de todas as casas do tabuleiro.
37. Pintamos cada casa de um tabuleiro 4×7 de branco ou preto. Mostre que, independente da coloração, sempre podemos escolher quatro quadrados da mesma cor que formam um retângulo.
38. (IMO 2004) Um *gancho* é uma figura formada por seis quadrados unitários como no seguinte diagrama.



ou qualquer uma das figuras obtidas desta aplicando rotações ou reflexões.

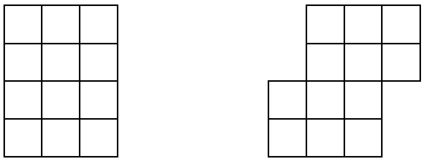
Determine todos os retângulos $m \times n$ que podem ser cobertos com ganchos de modo que:

- o retângulo é coberto sem buracos e sem sobreposições;

- nenhuma parte de nenhum gancho pode cobrir regiões fora do retângulo.

Para facilitar um pouco, vamos dividir esse problema em itens.

a) Prove que dois ganchos formam uma das seguintes figuras (ou rotações e reflexões delas) e mostre que se é possível cobrir, então *mn* é múltiplo de 12.



b) Prove que se *m* é múltiplo de 3 e *n* é múltiplo de 4 então é possível cobrir.

c) Prove que se *m* é múltiplo de 12 e $n \neq 1$ e $n \neq 5$ então é possível cobrir.

d) Prove que se é possível cobrir então *m* ou *n* é múltiplo de 4. Nesse item você vai precisar de duas pinturas, uma para cada tipo de figura encontrada no item (a).

8. Referências Bibliográficas

[1] Dois ótimos livros sobre o assunto são *Polyominoes: A Guide to Puzzles and Problems in Tiling*, de George E. Martin e *Polyominoes*, de Solomon Golomb.