

Arrastão, Quadriláteros Inscritíveis e Potência de Ponto

Deborah Barbosa Alves
deborah.alves@gmail.com

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência Γ_1 , P o ponto de interseção das diagonais AC e BD e M o ponto médio de CD . A circunferência Γ_2 que passa por P e é tangente a CD em M corta BD e AC nos pontos Q e R , respectivamente. Seja S o ponto do segmento BD tal que $BS = DQ$. A paralela a AB por S corta AC em T . Prove que $AT = CR$.

Problema 2. (IMO 2009) Seja ABC um triângulo com circuncentro O . Sejam P e Q pontos no interior dos lados AC e AB respectivamente. Sejam K , L e M os pontos médios dos segmentos BP , CQ e PQ respectivamente, e Γ o círculo que passa por K , L e M . Suponha que a reta PQ é tangente ao círculo Γ . Prove que $OP = OQ$.

Problema 3. (Shortlist IMO 2009) Seja ABC um triângulo. O incírculo de ABC toca os lados AB e AC nos pontos Z e Y respectivamente. Seja G o ponto de interseção das retas BY e CZ , e sejam R e S pontos tais que os quadriláteros $BCYR$ e $BCSZ$ são paralelogramos. Prove que $GR = GS$.

Problema 4. (Rioplantense 2002) Dado um quadrilátero $ABCD$, constroem-se triângulos isósceles ABK , BCL , CDM e DAN , com bases sobre os lados AB , BC , CD e DA , tais que K , L , M e N sejam pontos distintos, três a três não colineares. A perpendicular à reta KL traçada por B intersecta a perpendicular à reta LM traçada por C no ponto P ; a perpendicular à reta MN traçada por D intersecta a perpendicular à reta NK traçada por A no ponto Q . Demonstre que se P e Q são distintos, então PQ é perpendicular a KM .

Problema 5. (USAMO 1990) Um triângulo acutângulo ABC é dado no plano. O círculo com diâmetro AB intersecta a altura CC' e seu prolongamento nos pontos M e N , e o círculo com diâmetro AC intersecta a altura BB' e seu prolongamento em P e Q . Mostre que os pontos M , N , P e Q são concíclicos.

Problema 6. (Ibero 1999) Um triângulo acutângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O . As alturas do triângulo são AD , BE e CF . A reta EF intersecta a circunferência em P e Q .

- Prove que AO é perpendicular a PQ .
- Se M é o ponto médio de BC , prove que $AP^2 = 2 \cdot AD \cdot OM$.

Problema 7. (IMO 2010) Seja P um ponto no interior do triângulo ABC (com $CA \neq CB$). As retas AP , BP e CP intersectam o circuncírculo Γ de ABC em K , L e M respectivamente. A reta tangente a Γ em C intersecta a reta AB em S . Mostre que se $SC = SP$ então $MK = ML$.

Problema 8. (Shortlist IMO 2008) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja P e Q pontos em $ABCD$ tais que $PQDA$ e $QPBC$ são inscritíveis. Suponha que exista um ponto E no segmento PQ tal que $\angle PAE = \angle QDE$ e $\angle PBE = \angle QCE$. Prove que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.

Problema 9. (IMO 2008) Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC . A circunferência Γ_A com centro no ponto médio de BC e que passa por H intersecta a reta BC em A_1 e A_2 . Os pontos B_1, B_2, C_1 and C_2 são definidos analogamente. Prove que os seis pontos são concíclicos.