Problemas

Professor Luciano Castro, Rio de Janeiro – RJ

PROBLEMA 1:

(IME - 90) Considere um triângulo ABC inscrito em uma circunferência γ. Prove que as tangentes a γ traçadas por A, B, C intersectam os lados opostos em três pontos colineares.

PROBLEMA 2:

(Brasil - Seleção para a IMO - 2000) Sejam CC', BB' alturas do triângulo ABC; suponha $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Sejam M o ponto médio de BC, H o ortocentro de ABC, e D a interseção de BC e $B'C'$. Mostre que DH é perpendicular a AM.

PROBLEMA 3:

(China - 96) Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC. As tangentes traçadas por A ao círculo de diâmetro BC intersectam o círculo em P e Q. Prove que P, Q, H são colineares.

PROBLEMA 4:

(Banco - IMO - 97) Seja $A_1A_2A_3$ um triângulo não isósceles com incentro I. Seja C_i, $i = 1, 2, 3$ o menor círculo passando por I tangente a A_iA_{i+1} e A_iA_{i+2} (a adição dos índices módulo 3). Seja B_i, $i = 1, 2, 3$ o segundo ponto de interseção de C_{i+1} e C_{i+2}. Prove que os circuncentros dos triângulos A_1B_1I, A_2B_2I, A_3B_3I são colineares.

PROBLEMA 5:

(Polônia) Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito a uma circunferência γ de centro O e sejam M, N, P, Q os pontos de tangência com os lados BC, CD, DA e AB, respectivamente. Seja R o ponto de encontro das retas MQ e NP. Prove:

a) R, A e C são colineares.
b) $RO \perp BD$.

PROBLEMA 6:

(China) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência γ. Sejam P e Q os pontos de encontro de AB com CD e AD com BC, respectivamente. Sejam E e F os pontos de contato das tangentes a γ partindo de P. Mostre que Q, E e F são colineares. Aproveite e mostre que esta reta também passa pelo ponto de encontro das diagonais do quadrilátero.

PROBLEMA 7:

Seja γ a circunferência inscrita no quadrilátero $ABCD$. Sejam a, b, c e d os comprimentos das tangentes a γ traçadas por A, B, C e D, respectivamente. Mostre que

$$\frac{\overline{BI}}{ID} = \frac{b}{d}.$$

PROBLEMA 8:

São dados num plano π as retas ℓ_1, ℓ_2, concorrentes em Q e um ponto P externo a ℓ_1 e ℓ_2. A reta r_1 por P intersecta ℓ_1 em A e ℓ_2 em B. A reta r_2 por P intersecta ℓ_1 em C e ℓ_2 em D.
Se $AD \cap BC = X$, mostre que o lugar geométrico de X é uma reta por Q.

PROBLEMA 9:

(IMO - 85) Um círculo com centro O passa através dos vértices A e C do triângulo ABC, e intersecta os segmentos AB e BC novamente em pontos distintos K e N, respectivamente. As circunferências circunscritas aos triângulos ABC e KBN intersectam-se em exatamente dois pontos distintos B e M. Prove que o ângulo OMB é reto.