Problemas de Jogos e Tabuleiros

Professor Emiliano Augusto Chagas

Para esquentar!

01) Duas crianças se revezam em turnos quebrando uma barra retangular de chocolate, com seis quadrados de altura e oito quadrados de largura. Eles só podem quebrar a barra ao longo das divisões entre os quadrados. Eles continuam quebrando em pedaços até que só sobrem quadrados unitários no final. A criança que não consegue mais quebrar o chocolate perde o jogo. Qual criança vence o jogo?

02) Existem três pilhas de pedras, uma com 10, uma com 15 e outra com 20 pedras. Em cada turno, o jogador pode escolher uma das pilhas e dividi-la em duas pilhas menores. Perde quem não consegue fazer mais isso. Quem vai vencer e como?

03) Os números de 1 a 20 são escritos em uma linha. Dois jogadores se revezam em turnos colocando sinais de mais ou menos entre os números. Quando todos os sinais são colocados, a conta final é feita. O primeiro jogador ganha se o resultado for um número par, o segundo jogador ganha se o resultado for um número ímpar. Quem vai vencer e como?

04) Dois jogadores se revezam em turnos colocando torres em um tabuleiro convencional de xadrez de modo que as torres não se ataquem. Perde o jogador que não consegue colocar uma torre em seu turno. Quem vai vencer?

05) Dez números um e dez números dois são escritos em uma lousa. Em um turno, um jogador pode apagar dois números quaisquer. Se os dois números são iguais, eles são substituídos por um número 2, se os dois números são diferentes eles são substituídos por um número 1. O primeiro jogador ganha se o último número que resta é o um, o segundo jogador ganha se o último número que resta é o dois. Algum deles consegue garantir a vitória?

06) Os números 25 e 36 são escritos na lousa. Em cada turno, um jogador escreve a diferença (positiva) entre quaisquer dois números que estão na lousa, se esse número ainda não estiver na lousa. O perdedor é aquele que não consegue escrever um número. Algum deles consegue garantir a vitória?

Simetria

07) Dois jogadores se revezam em turnos colocando moedas em uma mesa redonda de modo que não haja sobreposição de moedas. O jogador que não conseguir colocar a moeda em seu turno perde. Algum deles consegue garantir a vitória?

08) Dois jogadores se revezam em turnos colocando bispos em um tabuleiro de xadrez convencional de modo que esses bispos não se ataquem. O jogador que não conseguir colocar um bispo em seu turno perde. Algum deles consegue garantir a vitória?

09) Considere duas pilhas de pedras, cada uma com sete pedras. Em cada turno, um jogador pode retirar quantas pedras quiser, mas apenas de uma das pilhas. O jogador que não conseguir retirar pedras em seu turno perde. Algum deles consegue garantir a vitória?

10) Dois jogadores se revezam em turnos colocando cavalos nos quadriculados de um tabuleiro de xadrez convencional de modo que os cavalos não se ataquem. O jogador que não conseguir colocar um cavalo em seu turno perde. Algum deles consegue garantir a vitória?

11) Dois jogadores se revezam em turnos colocando reis nos quadriculados de um tabuleiro de xadrez 9 x 9 de modo que os reis não se ataquem. O jogador que não conseguir colocar um rei em seu turno perde. Algum deles consegue garantir a vitória?

12) Dois jogadores se revezam em turnos colocando bispos nos quadriculados de um tabuleiro de xadrez convencional. Em cada turno, o bispo colocado deve ameaçar pelo menos um quadriculado que não é

ameaçado por outro bispo. O jogador que não conseguir colocar um bispo em seu turno perde. Algum deles consegue garantir a vitória?

13) Dado um tabuleiro de xadrez 10 x 10, dois jogadores se revezam em turnos cobrindo um par de quadriculados do tabuleiro com um dominó 2 x 1. Os dominós não podem se sobrepor ou sair do tabuleiro. Algum dos jogadores consegue garantir a vitória?

14) Em um tabuleiro de xadrez 11 x 11, há um feijão em cada quadradinho. Dois jogadores se revezam em turnos removendo um número qualquer de feijões que estão em uma mesma direção, de linha ou coluna. Algum dos jogadores consegue garantir a vitória?

Posições Vencedoras

15) Em um tabuleiro de xadrez convencional, uma torre está na posição a1 (esquerda em baixo). Os jogadores se revezam em turnos movendo a torre quantas posições quiserem, obedecendo os movimentos de uma torre, mas eles só podem mover para a direita ou para cima. O jogador que conseguir colocar a torre na posição h8 (direita em cima) ganha. Algum dos jogadores consegue garantir a vitória?

16) Um rei é colocado na posição a1 de um tabuleiro de xadrez convencional. Os jogadores se revezam em turnos movendo o rei para cima, para a direita ou para a diagonal superior direita. O jogador que conseguir colocar o rei na posição h8 ganha. Algum dos jogadores consegue garantir a vitória?

17) Existem duas pilhas de docinhos, uma contém 20 unidades e a outra 21 unidades. Os jogadores se revezam em turnos comendo todos os doces de uma das pilhas e separando a pilha remanescente em duas (não necessariamente iguais) pilhas não vazias. O jogador que não conseguir fazer isso em seu turno perde. Algum dos jogadores consegue garantir a vitória?

18) Uma peça de dama é colocada em cada uma das extremidades de uma fita quadriculada de dimensão 1 x 20. Os jogadores se revezam em turnos movendo cada uma das peças em direção à outra, avançando um ou dois quadradinhos. Uma peça não pode pular sobre a outra. O jogador que não conseguir fazer movimento em seu turno perde. Algum dos jogadores consegue garantir a vitória?

Problemas de Olimpíadas

19) (Rioplatense 2004) No jogo "O Triangulário" há três varetas: uma de lado um, uma de lado dois e outra de lado três. O primeiro jogador deve partir a vareta de lado três em seis varetas de lados quaisquer. Das oito varetas resultantes, o segundo jogador deve escolher três varetas de modo que seja possível formar um triângulo cujos lados são essas varetas. Se ele consegue fazer, então esse segundo jogador é o vencedor. Caso contrário ganha o primeiro jogador. Qual dos jogadores tem a possibilidade de assegurar a vitória? Explique como esse jogador deve proceder.

20) (Rioplatense 2005) Temos uma pilha de 1001 caramelos. Ariel e Bernardo, a cada turno, tiram caramelos da pilha respeitando as seguintes regras:

- Em cada turno devem tirar pelo menos um e não mais do que 101 caramelos da pilha.
- A quantia de caramelos que Ariel tira, em cada turno, tem que ser múltipla de três ou múltipla de três mais dois.
- A quantia de caramelos que Bernardo tira, em cada turno, tem que ser múltipla de três ou múltipla de três mais um.
- Perde o jogo aquele jogado que não conseguir jogar respeitando as regras.

Se quem começa o jogo é Ariel, determinar qual dos dois jogadores pode assegurar a vitória sem importar como jogue o outro. Explique de que modo isso é alcançado.

21) (Rioplatense 2004) Existem n caixas, cada uma com 3 bolinhas. Dois jogadores A e B, retiram cada um em seu turno, uma bolinha de qualquer caixa, começando com A e até acabarem todas as bolinhas. Aquele que retira a última bolinha de uma caixa ganha um ponto. O objetivo de cada jogador é alcançar a maior quantidade de pontos. Se ambos jogam sem cometer erros, determine quantos pontos cada um terá:

a) Se n = 100

b) Se n = 101

22) (Rioplatense 2007) Jorge tem uma quantidade par de cartões, numeradas de 1 a 2n, com n maior ou igual a 3. Ele pinta n cartões de vermelho e n cartões de azul. Então, ele desafia seu amigo Claudio a encontrar dois cartões vermelhos e dois cartões azuis tais que a diferença entre os números desses cartões vermelhos seja igual a diferença entre os números desses cartões azuis. Mostre que, independente da forma que Jorge pintou os cartões, Claudio sempre poderá encontrar os cartões com a propriedade proposta.

23) (Rioplatense 2008) No jogo do *despilhado*, participam dois jogadores, *A* e *B*. Inicialmente há uma pilha com 2008 moedas. Jogam um de cada vez, e cada jogador em seu turno deve escolher uma pilha e separá-la em duas pilhas de maneira que cada uma das pilhas obtidas tenha duas moedas ou mais. Perde o jogador que em seu turno não pode mais realizar jogada. Se *A* começa jogando, qual dos jogadores consegue assegurar a vitória independente de como joga o outro jogador?

24) (OPM 2010) “Sudokuto” é um jogo inspirado no Sudoku. Ele é jogado sobre tabuleiros quadriculados de diversos tamanhos. Vamos começar conhecendo a versão mais simples da brincadeira, a qual é jogada sobre um tabuleiro 3×3.
Alternadamente, dois jogadores colocam 1, 2 ou 3 em um quadradinho que ainda esteja vazio. Não podem aparecer em linhas (horizontais) ou em colunas (verticais) dois números iguais. Vence quem completar primeiro uma fileira horizontal ou vertical ou, caso nenhum movimento possa ser feito e nenhuma fileira estiver completa, vence quem fez a última jogada. Abaixo mostramos dois exemplos de partidas.
Os números menores indicam as jogadas. Por exemplo, na partida da esquerda, o 1º jogador colocou 1 na casa superior direita; em seguida, o 2º jogador colocou 1 no centro, e assim por diante.

	2_4	1_1
	1_2	2_5
3_3		

Não há jogadas possíveis; o 1º jogador vence

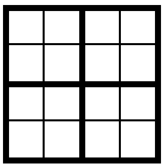
	1_1	
3_4		2_2
2_3	3_6	1_5

O 2º jogador vence na sexta jogada

a) Qual deve ser a próxima jogada do 1º jogador para que ele consiga completar uma fileira e vencer a partida a seguir, não importando quais sejam as jogadas do 2º jogador? Indique a jogada no diagrama da sua folha de respostas.

2		
	1	

b) Mostre que o 1º jogador possui uma estratégia vencedora para o tabuleiro 3×3. Ou seja, diga qual deve ser a sua jogada inicial e, a partir daí, mostre que ele consegue chegar à vitória, não importando quais sejam as jogadas do segundo jogador.
c) Vamos conhecer agora a versão sobre o tabuleiro 4×4.



Agora, os jogadores colocam, alternadamente, 1, 2, 3 ou 4 nos quadradinhos ainda vazios. Além de não poderem aparecer dois números iguais nas linhas e colunas, também não podem aparecer dois números iguais nas quatro regiões 2×2 destacadas. Vence quem completar primeiro uma fileira horizontal ou vertical ou região 2 × 2 ou, caso nenhum movimento possa ser feito e nenhuma fileira ou região esteja completa, vence quem fez a última jogada. Veja a reprodução da final do campeonato mundial, vencida por Sudokaldo.

	1_1	3_8	4_{11}
3_{10}	4_5		2_3
2_4		4_6	3_9
4_{12}	3_7	1_2	

Tendo como inspiração o grande mestre Sudokaldo, mostre que o 2º jogador possui uma estratégia vencedora para o tabuleiro 4×4.

25) (OPM 2002) No jogo denominado "Chomp", dois jogadores, Arnaldo e Bernaldo, dizem alternadamente divisores de um número N dado inicialmente. Os números ditos não podem ser múltiplos de nenhum dos números escolhidos anteriormente. Perde quem escolher o número 1.

Por exemplo, sendo $N = 423 = 2^4.3^3$, um jogo possível é

Arnaldo escolhe 36; Bernaldo escolhe 6 (observe que ele não poderia escolher 72 = 2.36, 108 = 3.36, etc ...); Arnaldo escolhe 16; Bernaldo escolhe 4, Arnaldo escolhe 9; Bernaldo escolhe 3; Arnaldo escolhe 2; Bernaldo escolhe 1, perdendo. Arnaldo é o vencedor!

Uma maneira de visualizar o que está acontecendo no jogo é desenhar uma barra de chocolate formada por quadradinhos numerados com os divisores de N. E, então, imaginar que os jogadores estão comendo os quadradinhos abaixo e á direita dos números que escolhem. O quadradinho 1 está envenenado! Para o nosso exemplo, teríamos:

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
27	54	108	216	432

(Mostramos no desenho os quadradinhos que Arnaldo comeria na sua primeira jogada, 36, 72, 108, 144, 216 e 432. Bernaldo, na sua primeira jogada comeria os quadradinhos 6, 12, 18, 24, 48 e 54.

Considere agora $N = 10000 = 2^4.5^5$.

a) Desenhe a barra de chocolate correspondente.

b) Mostre que se Arnaldo começar escolhendo 10, ele consegue vencer o jogo não importando quais os número Bernaldo escolhe.

c) Mostre que se Arnaldo começar escolhendo qualquer número diferente de 10, Bernaldo consegue vencer o jogo.

DICAS

02) Ao final de cada movimento, o número de pilhas aumenta uma unidade.

03) Será que a paridade do resultado final é afetada pelos sinais que são colocados?

04) Após a inserção uma torre, não podemos colocar mais nenhuma torre na mesma linha ou coluna dessa torre recém colocada.

05) Após qualquer jogada, o que acontece com o número de uns restante?

06) Já ouviu falar do algoritmo de Euclides? O problema está associado com o máximo divisor comum (MDC) entre dois números.

07) Considere uma moeda no centro da mesa, uma moeda sendo colocada em qualquer lugar e o próximo jogador coloca uma moeda sempre simétrica a essa última moeda com respeito ao centro.

08) Considere como linha de simetria uma reta entre a quarta e a quinta fileira. Veja que casas com cores diferentes não se atacam.

09) Imitação de jogada.

10) Um cavalo se move entre casa de cores distintas.

11) O que acontece se alguém toma o centro do tabuleiro?

12) Mesma dica do 08)

14) O que acontece se na primeira jogada alguém remover o feijão do centro?

15) O que acontece com o jogador que se encontra na diagonal?

16) Considerando a posição a1 como (1,1) e a h8 como (8,8), olhe as posições em que as duas coordenadas são pares.

17) O que acontece se só sobram duas pilhas com quantidades ímpares de docinhos?

18) O que acontece quando o número de quadradinhos não ocupados for divisível por 3?

20) Ariel tira 83 caramelos. Pense em jogadas complementares.

23) A divide em duas pilhas de 1004 e imita o jogador B.

24) a) O 1º jogador deve colocar o número 3 na casa oposta ao 2

b) A estratégia para o 1º jogador é colocar qualquer número no centro do tabuleiro.

c) A estratégia para o segundo jogador é sempre colocar, na casa simétrica à utilizada na última jogada do oponente, o mesmo número, exceto quando esse jogador conceder a vitória imediata.

GABARITO

02) O segundo jogador ganha.

03) O primeiro jogador ganha.

04) O segundo jogador ganha.

05) O segundo jogador ganha.

06) O segundo jogador ganha.

07) O primeiro jogador ganha.

08) O segundo jogador ganha.

09) O segundo jogador ganha.

10) O segundo jogador ganha.

11) O primeiro jogador ganha.

12) O segundo jogador ganha.

13) O segundo jogador ganha.

14) O primeiro jogador ganha.

15) O segundo jogador ganha.

16) O primeiro jogador ganha.

17) O primeiro jogador ganha.

18) O segundo jogador ganha.

20) Ariel vence.

21) Para 101 A ganha, para 100 B ganha.

23) *A* ganha.

24) a) O 1º jogador deve colocar o número 3 na casa oposta ao 2

b) A estratégia para o 1º jogador é colocar qualquer número no centro do tabuleiro.

c) A estratégia para o segundo jogador é sempre colocar, na casa simétrica à utilizada na última jogada do oponente, o mesmo número, exceto quando esse jogador conceder a vitória imediata.