15 problemas que magoaram os professores

1. Problema 5, IMO 2000

O problema: Verifique se existe um inteiro positivo n tal que n é divisível por exatamente 2000 números primos diferentes e $2^n + 1$ é divisível por n.

Pontuações do Brasil: $2 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 = 4$ de 42.

Por que esse problema magoou os professores: É só uma variação do bom e velho algoritmo do expoente.

2. Problema 4, IMO 2005

O problema: Determine todos os inteiros positivos relativamente primos com todos os termos da sequência infinita $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, $n \geq 1$.

Pontuações do Brasil: $2 + 1 + 1 + 7 + 7 + 7 = 25$ de 42.

Por que esse problema magoou os professores: O problema é o mesmo que calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1$.

3. Problema 5, IMO 2006

O problema: Seja $P(x)$ um polinômio de grau $n > 1$ com coeficientes inteiros e seja k um inteiro positivo. Considere o polinômio $Q(x) = P(P(\ldots(P(P(x))\ldots))$, em que P é aplicada k vezes. Prove que existem no máximo n inteiros t tais que $Q(t) = t$.

Pontuações do Brasil: $0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 1$ de 42.

Por que esse problema magoou os professores: "Que legal, caiu a propriedade $a - b \mid P(a) - P(b)$, que demos em aula! A gente vai se dar bem nesse problema!"

4. Problema 2, OBM 2007

O problema: Para quantos números inteiros c, $-2007 \leq c \leq 2007$, existe um inteiro x tal que $x^2 + c$ é múltiplo de 2^{2007}?

Pontuações: dos 224 alunos que fizeram a terceira fase, dois alunos fizeram 50 pontos, dois fizeram 45, um fez 10 e dois fizeram 5. Ou seja, de 224 alunos só 7 fizeram pontuação positiva.

Por que esse problema magoou os professores: Achar resíduos quadráticos tem que ter a mesma dificuldade que resolver equação do segundo grau... porque **os dois são a mesma coisa**.

5. Problema 5, IMO 2007

O problema: Sejam a e b inteiros positivos tais que $4ab - 1$ divide $(4a^2 - 1)^2$. Prove que $a = b$.

Pontuações do Brasil: $1 + 1 + 6 + 1 + 1 + 1 = 11$ de 42.

Por que esse problema magoou os professores: É a mesma coisa (na verdade, é mais fácil) que o problema 6 da IMO 1988:

> Sejam a e b inteiros positivos tais que $ab + 1$ divide $a^2 + b^2$. Prove que $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ é um quadrado perfeito.

6. Problema 3, IMO 2008

O problema: Prove que existe um número infinito de inteiros positivos n tais que $n^2 + 1$ tem um divisor primo maior que $2n + \sqrt{2n}$.

Pontuações do Brasil: $2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 2$ de 42.

Por que esse problema magoou os professores: Enquanto resolvíamos, no treinamento, o problema 2 da IMO 2003: "Como $2a > b$, para não ter que se preocupar com essa desigualdade tomamos $k = 2a - b$ como inteiro positivo." No problema 3 da IMO 2008: "Olha, consegui $p > 2n$, o que faço agora?"

7. Problema 5, IMO 2003

O problema: Sejam n um inteiro positivo e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais tais que $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$.

(a) Demonstre que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2$$

(b) Demonstre que a igualdade é válida se, e somente se, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formam uma progressão aritmética.

Pontuações do Brasil: $1 + 0 + 0 + 3 + 1 + 4 = 9$ de 42.

Por que esse problema magoou os professores: Soma de quadrados, quadrado de uma soma, igualdade envolvendo proporções... que parte do "use Cauchy-Schwartz" não ficou evidente?

8. Shortlist da IMO 2009, Teste de Seleção 2010

O problema: Sejam a, b, c reais positivos tais que $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Prove que

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \le \frac{3}{16}.$$

Pontuações: $10 + 10 + 10 + 7 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 16 \cdot 0 = 48$ de 250.

Por que esse problema magoou os professores: Um, ele quase caiu na IMO 2009; dois, é só aplicar **uma** desigualdade das médias e abrir tudo (na verdade, quase qualquer coisa resolve o problema).

9. Problema 2, IMO 1998

O problema: Numa competição, existem a concorrentes e b juízes, onde $b \ge 3$ é um inteiro ímpar. Cada juiz avalia cada um dos concorrentes, classificando-o como "aprovado" ou "reprovado". Suponha que k é um número tal que as classificações dadas por dois juízes quaisquer coincidem no máximo para k concorrentes. Prove que $\frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b}$.

Pontuações do Brasil: $7 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 7$ de 42.

Por que esse problema magoou os professores: "Só o Emanuel sabia contagem dupla?"

10. IMO Shortlist 1994, Treinamento Cone Sul 2001

O problema: Um conjunto de inteiros positivos é um *DS-set* quando cada um de seus elementos divide a soma dos demais. Prove que, dado um conjunto S de inteiros existe um DS-set que o contém.

Pontuações: Ninguém chegou perto de fazer o problema no simulado.

Por que esse problema magoou os professores: "Casos pequenos? Isso é coisa de nível 1!" **Não é.**

11. Problema 3, IMO 2001

O problema: Vinte e uma meninas e vinte e um meninos participaram numa competição matemática.

- Cada participante resolveu no máximo seis problemas.
- Para cada menina e cada menino, existe pelo menos um problema que foi resolvido por ambos.

Prove que existe um problema que foi resolvido por pelo menos três meninas e pelo menos três meninos.

Pontuações do Brasil: $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$ de 42.

Por que esse problema magoou os professores: Dois brasileiros da equipe no ônibus, voltando da primeira prova:

– Quais problemas você fez?

– Fiz o 1 e o 2. E você?

– Só o 1... espera, acho que saiu o 3!

– ... ah, acho que fiz também!

(nenhum papel foi utilizado nesse diálogo.)

12. Problema 1, IMO 2003

O problema: Seja A um subconjunto do conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ com exatamente 101 elementos. Demonstre que existem números $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ em S tais que os conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad \text{para} \qquad j = 1, 2, \ldots, 100$$

são disjuntos dois a dois.

Pontuações do Brasil: $7 + 1 + 2 + 0 + 7 + 2 = 19$ de 42.

Por que esse problema magoou os professores: Primeiro, qualquer estimativa resolvia o problema; segundo, esse problema é brasileiro!

13. Problema 2, IMO 2006

O problema: Seja P um polígono regular de 2006 lados. Uma diagonal é chamada *boa* quando suas extremidades dividem os lados de P em dois conjuntos, cada um com uma quantidade ímpar de elementos. Os lados de P também são considerados bons.

Suponha que P tenha sido dividido em triângulos por 2003 diagonais, sendo que não há duas delas se cortando em algum ponto interior de P. Encontre a quantidade máxima de triângulos isósceles que tem dois lados bons que pode aparecer nessa configuração.

Pontuações do Brasil: $1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 1 = 9$ de 42.

Por que esse problema magoou os professores: "Então não pode colocar vértices no grafo na indução?"

14. Problema 5, Cone Sul 2008

O problema: Seja ABC um triângulo isósceles com $AC = BC$. Seja Γ um semicírculo com centro sobre o segmento AB que tangencia AC e BC. Uma reta tangencia Γ e corta AC e BC em D e E, respectivamente.

Suponha que as retas perpendiculares de D a AC e de E a BC se cortam em um ponto P no interior do triângulo ABC. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre a reta AB. Prove que $\frac{PQ}{CP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{AC}$.

Pontuações do Brasil: $1 + 0 + 0 + 0 = 1$ de 40.

Por que esse problema magoou os professores: É só mais um problema de triângulo. Ou seja, na pior das hipóteses, faça as contas!

15. Problema 4, OBM 2010

O problema: Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $\angle B \neq 90^\circ$ e M e N os pontos médios dos lados CD e AD, respectivamente. As retas perpendiculares a AB passando por M e a BC passando por N cortam-se no ponto P. Prove que P pertence à diagonal BD se, e somente se, as diagonais AC e BD são perpendiculares.

Pontuações: As pontuações não foram ruins, mas para um problema 4 da OBM foram.

Por que esse problema magoou os professores: "Só tem retas, vou usar GA" é o mesmo que "desculpe, problema, não vou pensar de verdade em você".