1 Produtos Notáveis

1. Se x é um número real tal que $x + \frac{1}{x} = 5$, determine o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

   Solução: Elevando ambos os membros da equação $x + \frac{1}{x} = 5$ ao quadrado, obtemos:

   $$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 25,$$

   e daí, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$.

2. Fatore a expressão $E = x^3 - 5x^2 - x + 5$.

   Solução: Temos:

   $$\begin{aligned} E &= x^3 - 5x^2 - x + 5 \\ &= x^2(x-5) - (x-5) \\ &= (x-5)(x^2-1) \\ &= (x-5)(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

3. Simplifique a expressão

   $$A = \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

   Solução: Note que podemos escrever a expressão acima da seguinte forma:

   $$A = \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} - \frac{y^2}{(x-y)(y-z)} + \frac{z^2}{(x-z)(y-z)}.$$

   Assim, reduzindo a expressão ao mesmo denominador comum vem:

   $$A = \frac{x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(x-z)}.$$

   Por outro lado, desenvolvendo o denominador, obtemos:

   $$\begin{aligned} (x-y)(y-z)(x-z) &= (xy - xz - y^2 + yz)(x-z) \\ &= x^2y - xyz - x^2z + xz^2 \\ &\quad -xy^2 + y^2z + xyz - yz^2 \\ &= x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y). \end{aligned}$$

   Portanto,

   $$A = \frac{x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y)}{x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y)} = 1.$$

4. Se $x + y + z = 0$, mostre que $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

   Solução: Observe que

   $$0 = (x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(x+z).$$

   Como $x + y = -z$, $y + z = -x$ e $x + z = -y$, então:

   $$x^3 + y^3 + z^3 + 3(-z)(-x)(-y) = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

5. Calcule o valor da expressão

   $$S = \left(\frac{(2004)^3 - (1003)^3 - (1001)^3}{2004 \cdot 1003 \cdot 1001} \right).$$

   Solução: Vamos tomar $x = 1003$ e $y = 1001$. Dessa forma, a expressão S se reduz a:

   $$S = \frac{(x+y)^3 - x^3 - y^3}{xy(x+y)}.$$

   Mas, como sabemos, $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Dessa forma, obtemos:

   $$S = \frac{3x^2y + 3xy^2}{xy(x+y)} = \frac{3xy(x+y)}{xy(x+y)} = 3.$$

6. Sabendo que x, y e z são reais satisfazendo $xyz = 1$, calcule o valor da expressão

   $$A = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz}.$$

   Solução: Como $xyz = 1$, então $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$. Assim,

   $$\begin{aligned} A &= \frac{z}{z(1+x+xy)} + \frac{x}{x(1+y+yz)} + \frac{1}{1+z+xz} \\ &= \frac{z}{z+xz+xyz} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{1}{1+z+xz} \\ &= \frac{z}{1+z+xz} + \frac{x}{1+x+xy} + \frac{1}{1+z+xz} \\ &= \frac{z}{1+z+xz} + \frac{xz}{z+xz+xyz} + \frac{1}{1+z+xz} \\ &= \frac{z}{1+z+xz} + \frac{xz}{1+z+xz} + \frac{1}{1+z+xz} \\ &= \frac{1+z+xz}{1+z+xz} \\ &= 1. \end{aligned}$$

7. Se $ab = 1$ e $a^2 + b^2 = 3$, determine $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2$.

   Solução: Temos:

   $$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 &= \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{a^2b^2} \\ &= \frac{(a^2+b^2)^2}{(ab)^2} \\ &= 9. \end{aligned}$$

8. Prove que se $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ e $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$, então $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

   Solução: Elevando a equação $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ ao quadrado, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{x}{a}\frac{y}{b}+\frac{y}{b}\frac{z}{c}+\frac{x}{a}\frac{z}{c}\right)=1,$$

   ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xyc+xzb+yza}{abc}\right)=1.$$

   Por outro lado, da equação $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$, temos $xyc+xzb+yza=0$. Logo,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

9. Se a, b e c são três números distintos e satisfazem as equações:

$$\begin{cases} a^3+pa+q=0\\ b^3+pb+q=0\\ c^3+pc+q=0,\end{cases}$$

   calcule $a+b+c$.

   Solução: Multiplicando a segunda equação por -1 e somando com a primeira, obtemos:

$$a^3-b^3+p(a-b)=0,$$

   ou ainda,

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)+p(a-b)=0,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2+p)=0.$$

   Como $a-b\neq 0$, pois os números são distintos, obtemos:

$$a^2+ab+b^2+p=0. \quad (*)$$

   Analogamente, multiplicando a terceira equação por -1 e somando com a primeira equação, obtemos:

$$a^2+ac+c^2+p=0. \quad (**)$$

   Agora, multiplicando (**) por -1 e somando com (*), obtemos:

$$ab-ac+b^2-c^2=0,$$
$$a(b-c)+(b-c)(b+c)=0,$$
$$(b-c)(a+b+c)=0.$$

   Daí, como $b-c\neq 0$, segue que $a+b+c=0$.

10. Sejam a, b e c números reais distintos e não nulos. Se $a+b+c=0$, mostre que

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

   Solução: Façamos $x=\dfrac{a-b}{c}$, $y=\dfrac{b-c}{a}$ e $z=\dfrac{c-a}{b}$. Assim, devemos provar que

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=9,$$

   ou seja,

$$\frac{x+y+z}{x}+\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z}=9,$$

   ou ainda,

$$1+\frac{y+z}{x}+1+\frac{x+z}{y}+1+\frac{x+y}{z}=9,$$
$$\Rightarrow \frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=6.$$

   Mas,

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{z} &= \left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}\right)\left(\frac{b}{c-a}\right)\\ &= \frac{a^2-ab+bc-c^2}{ac}\cdot\frac{b}{c-a}\\ &= \frac{(a^2-c^2)-b(a-c)}{ac}\cdot\frac{b}{c-a}\\ &= \frac{(a-c)(a+c)-b(a-c)}{ac}\cdot\frac{b}{c-a}\\ &= \frac{(a-c)(a+c-b)}{ac}\cdot\frac{b}{c-a}\\ &= -\frac{(-b-b)b}{ac}\\ &= \frac{2b^2}{ac}.\end{aligned}$$

   Analogamente, concluímos que $\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{2c^2}{ab}$ e $\dfrac{x+z}{y}=\dfrac{2a^2}{bc}$. Logo, pelo exercício 4, segue que

$$\begin{aligned}\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z} &= \frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}+\frac{2c^2}{ab}\\ &= 2\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\right)\\ &= 2\cdot\left(\frac{3abc}{abc}\right)\\ &= 6,\end{aligned}$$

   como queríamos provar.

Exercícios Propostos

1. Fatore a expressão $S = x^4 + x^2 + 1$.

2. Determine a expressão que deve ser multiplicada por $x\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{x}$ para obtermos $2x(x^2+4)$.

3. Calcule o valor da expressão
$$S = \left(\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x^3-1)^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{(x^3+1)^2}\right)^2.$$

4. Se $x^2 + y^2 = 3xy$, calcule $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)$.

5. Simplifique
$$\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz\right)^2 - (x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2).$$

6. Fatore as seguintes expressões:
   (a) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$;
   (b) $(x-y)z^3 - (x-z)y^3 + (y-z)x^3$;
   (c) $(x^2+x+3)(x^2+x+4) - 12$;
   (d) $x^4 + 4y^4$;
   (e) $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$;
   (f) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;
   (g) $(a+2b-3c)^3 + (b+2c-3a)^3 + (c+2a-3b)^3$.

7. Simplifique as expressões:
   (a) $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{1+x^8}$;
   (b) $\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-x)(y-z)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}$;
   (c) $\frac{(x^2-y^2)^3 + (y^2-z^2)^3 + (z^2-x^2)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$.

8. Prove que se $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0$, então
$$\frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0.$$

9. Para que valores de $a \in \mathbb{N}$ a expressão $a^4 + 4$ é um número primo?

10. Prove que se $a + b + c = 0$ então
$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

11. Mostre que $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$.

12. Prove que se $a + b + c = 0$, então
$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7} = \frac{a^5+b^5+c^5}{5} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

13. Se a, b e c são reais não nulos que satisfazem $a+b+c = 0$, calcule
$$\frac{(a^3+b^3+c^3)^2(a^4+b^4+c^4)}{(a^5+b^5+c^5)^2}.$$

14. Prove que se x, y e z são racionais distintos então a expressão
$$\frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$$
é um quadrado perfeito.

15. Fatore $8(x+y+z)^3 - (x+y)^3 - (y+z)^3 - (x+z)^3$.