Introdução à Programação Linear

1. O que é Programação Linear?

Vamos apresentar o conceito de problema de programação linear com um exemplo.

Um fabricante de móveis vende sofás, mesas e cadeiras. Obtém-se um lucro de \$5 *com cada sofá,* \$4 *com cada mesa e* \$3 *com cada cadeira. Um sofá gasta duas tábuas de madeira, demora quatro horas para ser estofado e três horas para ser acabado. Uma mesa gasta três tábuas de madeira (as mesas devem ser maiores que os sofás), passa uma hora sendo estofada (mesas não devem ser muito macias!) e quatro horas no acabamento. Por fim, uma cadeira gasta uma tábua de madeira, leva duas horas sendo estofada (uma cadeira deve ser mais macia que uma mesa, mas não tanto como um sofá...) e duas horas no acabamento. Tendo disponíveis* 5 *tábuas de madeira,* 11 *horas de trabalho para estofamento e* 8 *horas para acabamento, que quantidades de sofás, mesas e cadeiras devem ser fabricadas de modo a obtermos o máximo de lucro?*

Vamos elaborar um *problema de programação linear* que simboliza algebricamente o nosso problema.

Sejam x_1, x_2 e x_3 as quantidades de sofás, mesas e cadeiras a serem fabricadas, respectivamente. Assim, o lucro total a ser maximizado é $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$.

O número de tábuas a serem utilizadas é $2x_1 + 3x_2 + x_3$, e deve ser menor ou igual ao que temos, ou seja, 5. Logo $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$. Da mesma forma, obtemos as restrições $4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11$ e $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8$. É claro que x_1, x_2 e x_3 não podem ser negativos (a não ser que houvesse tábuas de madeira feitas de anti-matéria...).

Assim, o nosso problema é

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Problemas desse tipo, onde devemos maximizar ou minimizar uma função linear (ou seja, uma expressão do tipo $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes reais), sujeito a um conjunto de inequações e equações lineares, são chamados *problemas de programação linear*. Estes problemas são bastante encontrados na prática, sendo muito úteis em Engenharia, Economia e Finanças, entre outras aplicações.

2. Resolvendo problemas de programação linear: o método simplex

Para a resolução de problemas de programação linear, existe um método conhecido como *método simplex* (o nome "simplex" vem do fato do conjunto de restrições lineares representarem geometricamente uma figura chamada *simplexo*, que é o equivalente aos poliedros no espaço e aos polígonos no plano).

Vamos exemplificar o método simplex resolvendo o problema do fabricante de móveis enunciado anteriormente. Assim, devemos

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

O primeiro passo do método simplex é introduzir as chamadas *variáveis de folga*. Tomemos a primeira restrição, por exemplo. Ela nos diz que a expressão $2x_1 + 3x_2 + x_3$ é menor ou igual a 5. Assim, existe uma "folga" entre os dois valores. Seja x_4 esta folga, isto é, seja $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$. Observe que a primeira restrição pode ser escrita agora simplesmente como $x_4 \geq 0$. Definido x_5 e x_6 de forma análoga para a segunda e terceira restrições, respectivamente, e fazendo $z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$, temos

$$\begin{array}{rl} x_4 = & 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 = & 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_6 = & 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \hline z = & \phantom{11 -{}} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{array} \tag{I}$$

e o problema pode ser reescrito desta forma:

$$\text{maximizar } z \text{ sujeito a } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

As variáveis x_4, x_5 e x_6 são chamadas *variáveis de folga*. Por motivos históricos, as variáveis x_1, x_2 e x_3 costumam ser denominadas *variáveis de decisão*.

A principal idéia do método simplex é a seguinte: dada uma solução $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ que satisfaz todas as condições anteriores (uma solução desse tipo é chamada *solução factível* ou *viável*), deve-se encontrar uma solução $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6})$ *melhor* no sentido que

$$5\overline{x_1} + 4\overline{x_2} + 3\overline{x_3} > 5x_1 + 4x_2 + 3x_3.$$

Repetindo este processo um certo número de vezes, chegaremos a uma solução ótima, ou seja, que torna z máximo (ou, se for o caso, mínimo).

Precisamos, assim, de uma solução inicial. Isto não é difícil: fazendo $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, temos a solução

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 5;\ x_5 = 11;\ x_6 = 8,$$

com $z = 0$.

Agora vamos procurar uma solução factível melhor. Podemos aumentar x_1 (que é o que faz, a princípio, aumentar mais o valor de z), mantendo $x_2 = x_3 = 0$. Mas em quanto podemos aumentar x_1?

Sabemos que $x_4 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 = 0$, temos $x_4 = 5 - 2x_1 \geq 0$, ou seja, $x_1 \leq \frac{5}{2}$. Da mesma forma, a partir de $x_5 \geq 0$ obtemos $x_1 \leq \frac{11}{4}$ e de $x_6 \geq 0$ obtemos $x_1 \leq \frac{8}{3}$. Logo devemos ter $x_1 \leq \frac{5}{2}$. Fazendo $x_1 = \frac{5}{2}$, substituindo em (I) obtemos a solução

$$x_1 = \frac{5}{2};\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 1;\ x_6 = \frac{1}{2},$$

com $z = \frac{25}{2}$. Observe que, de fato, obtivemos uma "melhora".

Vamos procurar agora uma solução melhor ainda. Mas como fazê-lo? Notemos que o sistema (I) nos guiou na busca de uma nova solução antes. Assim, devemos montar outro sistema de equações equivalente ao primeiro. Observe que em (I) escrevemos as variáveis não nulas em função das variáveis nulas. Façamos o mesmo: da primeira equação de (I) temos $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$. Substituindo x_1 nas outras equações conseguimos o sistema desejado:

$$\begin{array}{rl} x_1 = & \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = & 1 + 5x_2 \phantom{{}- \frac{1}{2}x_3} + 2x_4 \\ x_6 = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\ \hline z = & \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 \end{array}$$

Agora podemos procurar outra solução. Observemos que não é vantajoso aumentar x_2 ou x_4. Aumentemos então x_3, mantendo $x_2 = x_4 = 0$. Temos que $x_1 \geq 0$ implica $x_3 \leq 3$ e $x_6 \geq 0$ implica $x_3 \leq 1$ (observemos que $x_5 \geq 0$ não restringe x_3). Aumentando x_3 para 1, obtemos

$$x_1 = 2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1;\ x_4 = 0;\ x_5 = 1;\ x_6 = 0,$$

com $z = 13$. O sistema associado a essa solução (verifique!) é

$$\begin{array}{l} x_3 = \ \ 1 + \ \ x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\ x_1 = \ \ 2 - 2x_2 - 2x_4 + \ \ x_6 \\ x_5 = \ \ 1 + 5x_2 + 2x_4 \\ \hline \ z = 13 - 3x_2 - \ \ x_4 - \ \ x_6 \end{array}$$

Continuemos a procurar outra solução melhor. Ora, se aumentarmos qualquer uma das variáveis x_2, x_4 ou x_6, z irá diminuir. Isto quer dizer que não podemos aumentar mais z, ou seja, já encontramos o maior valor possível para z! De fato, como x_2, x_4 e x_6 são maiores ou iguais a zero, temos $z \leq 13$, com igualdade se, e somente se, $x_2 = x_4 = x_6 = 0$. Logo a última solução é ótima (observemos que tal solução também é a única, pois devemos ter $x_2 = x_4 = x_6 = 0$ e logo só podemos ter $x_3 = 1$, $x_1 = 2$ e $x_5 = 1$).

Assim, devemos fabricar 2 sofás e 1 cadeira. Observe que $x_5 = 1$ indica que ainda podemos dar 1 hora de folga para o pessoal que estofa os móveis!

Notemos que este método é geral e pode ser aplicado a qualquer problema de programação linear. Deve-se observar que há procedimentos bem determinados:

O método simplex em passos

(1) Introduza as variáveis de folga.

(2) Encontre uma solução inicial e monte o sistema associado a ele.

(3) Escolha uma variável nula para ser aumentada. Se não houver variável a ser aumentada, a solução atual é ótima.

(4) Verifique o quanto esta variável pode ser aumentada usando o sistema.

(5) Escreva as variáveis não nulas em função das nulas e volte ao passo (2).

3. Truques úteis no método simplex

Resolvemos anteriormente um problema de maximizar quantidades com inequações do tipo $\leq$ e variáveis não negativas. Mais especificamente, um problema do tipo

$$\begin{array}{rll} \text{maximizar} & \displaystyle\sum_{1 \leq j \leq n} c_j x_j & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{array}$$

Podemos reduzir todos os problemas de programação linear a um problema semelhante ao anterior.

3.1. Mudando a função $\sum_{1 \leq j \leq n} c_j x_j$

Suponhamos que queiramos minimizar uma função z. O valor mínimo de z é igual ao oposto do valor máximo de $-z$. Assim, podemos maximizar $-z$.

3.2. Mudando variáveis

Caso uma variável x_k seja não positiva, tomamos $x'_k = -x_k$, que é não negativa. Caso uma variável x_ℓ seja real, fazemos $x_\ell = x_\ell^+ - x_\ell^-$, fazendo x_ℓ^+ e x_ℓ^- não negativas: se $x_\ell \leq 0$, temos $x_\ell^+ = 0$ e $x_\ell^- \geq 0$; se $x_\ell \geq 0$, temos $x_\ell^+ \geq 0$ e $x_\ell^- = 0$.

3.3. Mudando restrições

Podemos transformar uma restrição $\geq$ em uma restrição $\leq$ multiplicando os dois membros por -1. Uma restrição $f(x) = 0$ pode ser transformada em duas restrições: uma do tipo $f(x) \geq 0$ (que é equivalente a $-f(x) \leq 0$) e outra do tipo $f(x) \leq 0$.

Assim, podemos resolver qualquer problema de programação linear utilizando o método descrito. Na verdade, podemos programar um computador para resolver estes problemas. Existem vários softwares que resolvem problemas de programação linear.

4. Problemas que podem ocorrer no método simplex

4.1. Inicializando o método simplex

Considere o problema em que se deve

$$\begin{array}{rll} \text{maximizar} & \displaystyle\sum_{1\leq j\leq n} c_j x_j & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{1\leq j\leq n} a_{ij}x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots, n) \end{array}$$

Adicionadas as variáveis de folga $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, uma solução inicial poderia ser $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ e teríamos assim $x_{n+k} = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Mas se existir um b_i negativo, esta solução não é viável.

Cabem então duas perguntas: se isto ocorrer, como encontrar uma solução inicial? Podemos saber se não existe uma solução inicial?

A resposta para ambas as perguntas é sim. A solução é adotar um problema *auxiliar*, introduzindo a variável x_0:

$$\begin{array}{rll} \text{minimizar} & x_0 & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{1\leq j\leq n} a_{ij}x_j - x_0 \leq b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & x_j \geq 0 & (j = 0, 1, 2, \ldots, n) \end{array}$$

Observemos que uma solução inicial para este problema é $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ e x_0 suficientemente grande. É fácil de se verificar que o problema original admite solução se, e somente se, o problema auxiliar admite uma solução ótima com $x_0 = 0$ (observemos que x_0 não "deveria estar" no problema – $x_0 > 0$ indica que as restrições do problema original não podem ser satisfeitas). Assim este problema auxiliar tem duas finalidades: determinar se o problema original tem solução e, em caso positivo, encontrar uma solução inicial.

Vamos mostrar um exemplo: vamos encontrar uma solução inicial para o problema de

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

O problema auxiliar é

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & -x_0 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_0 \leq -5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_0 \leq -1 \\ & x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Introduzindo as variáveis de folga x_4, x_5 e x_6, temos o sistema

$$\begin{array}{rl}
x_4 = & 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\
x_5 = & -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_0 \\
x_6 = & -1 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_0 \\
\hline
w = & \qquad\qquad\qquad\qquad - x_0
\end{array}$$

É claro que não podemos adotar $x_4 = 4$, $x_5 = -5$ e $x_6 = -1$. A idéia é tomarmos a variável de valor mais negativo (no caso, x_5) e trocar por x_0. Assim, temos o sistema

$$\begin{array}{rl}
x_0 = & 5 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 \\
x_4 = & 9 \qquad\; - 2x_2 - x_3 + x_5 \\
x_6 = & 4 + 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 \\
\hline
w = & -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5
\end{array}$$

Aumentando x_2 para 1, temos

$$\begin{array}{rl}
x_2 = & 1 + \frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 \\
x_0 = & 2 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{3}{4}x_6 \\
x_4 = & 7 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 \\
\hline
w = & -2 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{3}{4}x_6
\end{array}$$

Agora aumentamos x_3: temos

$$\begin{array}{rl}
x_3 = & \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{5}x_6 - \frac{4}{5}x_0 \\
x_2 = & \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6 - \frac{3}{5}x_0 \\
x_4 = & 3 - x_1 \qquad\quad - x_6 + 2x_0 \\
\hline
w = & \qquad\qquad\qquad\qquad - x_0
\end{array}$$

que é a solução ótima. Assim, temos uma solução para o problema original. Podemos agora voltar ao problema original. Ainda falta escrever $z = x_1 - x_2 + x_3$ em função das variáveis nulas. Basta substituir x_2 e x_3, obtendo $z = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_5 + \frac{2}{5}x_6$. Além disso, podemos omitir x_0 e escrever o sistema inicial

$$\begin{array}{rl}
x_3 = & \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{5}x_6 \\
x_2 = & \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6 \\
x_4 = & 3 - x_1 \qquad\quad - x_6 \\
\hline
z = & -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_5 + \frac{2}{5}x_6
\end{array}$$

e assim proceder com o método simplex normalmente.

4.2. Iterando o método simplex

Fazer uma *iteração* no método simplex é encontrar uma solução melhor que a anterior e montar o sistema associado a essa solução. Para encontrar uma solução melhor, precisamos aumentar uma das variáveis nulas e verificar o maior valor possível que podemos tomar para esta variável. Caso haja mais de uma variável que possa ser aumentada, podemos escolher qualquer uma delas. Em geral, escolhemos aquela cujo coeficiente em z é mais positivo (ou se for o caso, mais negativo). Pode ser que não consigamos achar um valor máximo para esta variável. Por exemplo, no sistema

$$\begin{array}{rl} x_2 = & 5 + 2x_3 - x_4 - 3x_1 \\ x_5 = & 7 \qquad\quad - 3x_4 - 4x_1 \\ \hline z = & 5 + x_3 - x_4 - x_1 \end{array}$$

a única variável a ser aumentada é x_3. Observe que $x_2 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$ não impõem nenhuma restrição sobre x_3. Assim, podemos aumentar x_3 o quanto quisermos. Neste caso, o problema é *ilimitado*, ou seja, não existe máximo para z (z pode ser o quão grande quisermos). No exemplo, fazendo $x_3 = t$ e $x_4 = x_1 = 0$, temos $x_2 = 5 + 2t$, $x_5 = 7$ e $z = 5 + t$. Para qualquer valor de t, todas as variáveis são não negativas e satisfazem o sistema. Assim, temos uma solução viável para qualquer t.

Quando a variável a ser aumentada é restringida por mais de uma equação, podemos escolher qualquer uma destas equações para isolar a variável.

Como escrever o sistema é só fazer uma conta, vemos que sempre conseguimos iterar o método simplex, exceto quando o problema é ilimitado.

4.3. Terminando o método simplex

Pode ser que o método simplex entre em ciclo, sem nunca encontrar uma solução ótima. Isto depende dos critérios utilizados para escolher a variável a ser aumentada e a equação onde esta variável deve ser isolada no sistema. Por exemplo, se os critérios forem escolher a variável cujo coeficiente em z é mais positivo e escolher, no caso de empate, a equação cujo primeiro membro tem a variável de menor índice (que são os critérios mais utilizados), o problema cujo sistema é

$$\begin{array}{rl} x_5 = & -\frac{1}{2}x_1 + \frac{11}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 - 9x_4 \\ x_6 = & -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 \\ x_7 = & 1 - x_1 \\ \hline z = & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \end{array}$$

irá entrar em ciclos (verifique!) de 6 iterações (isto é, a cada 6 iterações obtemos o mesmo sistema).

Na verdade, problemas deste tipo são raros. Todavia, existem critérios que nunca deixam os sistemas entrarem em ciclo. Os seguintes critérios evitam ciclos:

Critérios que evitam ciclos

Escolher a variável cujo coeficiente em z é positivo e cujo índice é mínimo e escolher, no caso de empate, a equação cujo primeiro membro tem a variável de menor índice.

Uma demonstração rigorosa desse fato pode ser encontrada na referência [1].

5. Considerações sobre o método simplex: um pouco de história

O método simplex foi desenvolvido em 1947 por G. B. Dantzig para resolver problemas envolvendo o planejamento da Força Aérea norte-americana e marcou o início da Programação Linear.

Com o tempo, descobriram-se várias aplicações práticas da Programação Linear em diversas áreas de trabalho: planejamento e programação de estoques e produção, alocação de recursos em redes de transporte, ente outras. Atualmente, existem softwares que resolvem diversos tipos de problema de programação matemática, incluindo problemas de programação linear. As aplicações atuais envolvem um número grande de variáveis, chegando freqüentemente à casa dos milhares (já se falou em aplicações com milhões de variáveis), tornando assim essencial o uso de computadores.

A Programação Linear já proporcionou um Prêmio Nobel de Economia para L. V. Kantorovich e T. C. Koopmans em 1975.

6. Exercícios

01. Resolva os seguintes problemas de programação linear.

a) maximizar $x_1 + 12x_2 - x_3$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a}\quad & x_1 + 12x_2 - 3x_3 \le 8 \\ & 8x_1 - x_2 + x_3 \le 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

b) maximizar $6x + 10y$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a}\quad & 3x + 5y \le 15 \\ & 5x + 2y \le 10 \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

c) maximizar $x + y$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a}\quad & -x + y \le 1 \\ & -x + 2y \le 4 \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

d) minimizar $x - 6y$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a}\quad & x + 4y \le 21 \\ & 3x + 2y \ge 13 \\ & x - y = 1 \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

02. Resolva o seguinte problema, identificando claramente as variáveis de decisão, as restrições e a função objetivo.

Uma fábrica de alimentos produz quatro tipos de produtos: A, B, C e D. Sabemos que os lucros obtidos com cada um desses produtos são R\$2,00, R\$3,00, R\$4,00 e R\$8,00, respectivamente. A capacidade de produção da fábrica é de 3 000 *unidades mensais. Sabemos também que cada unidade do produto A leva* 3 *horas para ser produzido e* 1 *hora para ser embalado, enquanto o produto B demora* 5 *horas para ser produzido e* 1,5 *hora para ser embalado, o produto C leva* 6 *horas para ser produzido e* 3 *horas para ser embalado e o produto D leva* 10 *horas para ser produzido e* 5 *horas para ser embalado. Levando em conta que temos* 320 *horas mensais disponíveis para produção e* 160 *horas disponíveis para embalagem, encontre a quantidade de cada produto que deve ser produzida mensalmente pela fábrica de modo a maximizar o lucro total.*

03. Resolva o problema de

$$\begin{aligned} \text{maximizar}\quad & 100x_1 + 10x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a}\quad & x_1 \le 1 \\ & 20x_1 + x_2 \le 100 \\ & 200x_1 + 20x_2 + x_3 \le 10000 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Adote como critério escolher a variável de coeficiente em z mais positivo. Quantas iterações são necessárias?

Observação: o problema é um caso particular do problema de Klee-Minty

$$\begin{aligned} \text{maximizar}\quad & \sum_{1\le j\le n} 10^{n-j} x_j \\ \text{sujeito a}\quad & \left(2 \sum_{1\le j\le i-1} 10^{i-j} x_j\right) + x_i \le 100^{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ & x_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

desenvolvido por V. Klee e G. J. Minty em 1972. Pode-se mostrar que o problema de Klee-Minty exige $2^n - 1$ iterações, o que demonstra que o método simplex é exponencial, ou seja, o número máximo de iterações cresce exponencialmente em relação ao tamanho do problema. Em 1979, L. G. Khachian publicou um algoritmo (chamado *método da elipsóide*) que resolve todo problema de programação linear em tempo polinomial (mostrando que problemas de programação linear são de classe P).

7. Uma aplicação da Programação Linear em teoria dos jogos

O seguinte jogo foi desenvolvido e analisado por H. W. Kuhn em 1950 e é uma espécie de "pôquer simplificado". O estudo é interessante no sentido que mostra que em certos jogos é vantajoso blefar ou até mesmo "esconder o jogo" em algumas partidas.

7.1. Regras

Neste jogo (para dois jogadores) são utilizadas três cartas com os números 1, 2 e 3. No começo do jogo, cada jogador aposta \$1 e recebe uma carta. Em seguida, os jogadores apostam mais \$1 ou passam, alternadamente, até que ambos passam (os dois "saem do jogo") ou um deles aposta e o outro em seguida passa (o segundo jogador "foge"). Nas primeiras duas situações, quem estiver com a maior carta ganha tudo o que foi apostado. Na última situação, quem passou perde \$1 para quem apostou.

Considere os jogadores A e B, sendo que A começa o jogo. O jogo pode se desenrolar das seguintes formas:

- A passa e B passa: quem tiver a maior carta ganha \$1;
- A passa; B aposta; A passa: B ganha \$1;
- A passa; B aposta; A aposta: quem tiver a maior carta ganha \$2;
- A aposta e B passa: A ganha \$1;
- A aposta e B aposta: quem tiver a maior carta ganha \$2.

7.2. Estratégias

A pode seguir as seguintes estratégias:

Estratégias de A
1. Passar; se B apostar, passar de novo.
2. Passar; se B apostar, apostar.
3. Apostar.

B pode seguir as seguintes estratégias:

Estratégias de B
1. Passar, não importando o que A fizer.
2. Se A passar, passar; se A apostar, apostar.
3. Se A passar, apostar; se A apostar, passar.
4. Apostar sempre, não importando o que A fizer.

É claro que as estratégias dependem das cartas que A e B receberam. Assim, A tem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ estratégias enquanto B tem $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Usaremos a seguinte notação: (x_1, x_2, x_3) é uma estratégia onde A fará o que está escrito na linha x_1 se receber a carta 1, o que está na linha x_2 se receber a carta 2 e o que está na linha x_3 se receber a carta 3. Define-se (y_1, y_2, y_3) de forma similar para B.

Observemos que há $27 \cdot 64 = 1728$ pares de estratégias. Entretanto, podemos eliminar de imediato as estratégias "perdedoras": é claro que se A receber a carta 1 não poderá fazer o que está na linha 2. Logo podemos eliminar as estratégias da forma $(2, x_2, x_3)$ – $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades. Da mesma forma, A não poderá fazer o que está na linha 1 se receber a carta 3. Assim, eliminamos $(x_1, x_2, 1)$ – mais 9 possibilidades.

Como descontamos duas vezes as estratégias $(3, x_2, 1)$, A tem agora $27 - 9 - 9 + 3 = 12$ estratégias não "perdedoras". Da mesma forma, eliminamos de B as estratégias $(2, y_2, y_3)$, $(4, y_2, y_3)$, $(y_1, y_2, 1)$, $(y_1, y_2, 2)$, $(y_1, y_2, 3)$, sobrando assim somente 8 estratégias (verifique!).

Ainda podemos cortar mais algumas estratégias: se A receber 2, pode muito bem passar. Se B tirou 1, não irá passar; se tirou 3, também não, pois B não adotará nenhuma das estratégias $(y_1, y_2, 1)$ ou $(y_1, y_2, 3)$. Logo B irá apostar de qualquer modo, e portanto se A receber 2 pode adotar tanto o que está na linha 2 como o que está na 3, obtendo o mesmo resultado. Assim, podemos eliminar as estratégias da forma $(x_1, 3, x_3)$ (é claro que poderíamos eliminar as estratégias $(x_1, 2, x_3)$). Podemos concluir da mesma forma que, quando B recebe 2, as estratégias 1 e 3 e as estratégias 2 e 4 são equivalentes. Assim, podemos eliminar as estratégias $(y_1, 3, y_3)$ e $(y_1, 4, y_3)$.

Feito isso, temos apenas 8 estratégias para A e 4 para B. Para quem tinha 27 e 64, melhorou bastante, não?

7.3. O quanto se pode ganhar usando as estratégias

Temos $3 \cdot 2 = 6$ possíveis maneiras de distribuir as cartas para A e B. Vamos supor que as 6 possibilidades são igualmente prováveis. Assim, por exemplo, em $1/6$ das partidas, A recebe 1 e B recebe 2.

Se A usa a estratégia $(1, 1, 2)$ e B usa a estratégia $(3, 1, 4)$, temos (usaremos a seguinte notação: se A perder $\$x$, então diremos que A ganhou $-\$x$)

Uma partida

- $\star$ A recebe 1 e B, 2: A passa, B passa................ A recebe $-\$1$.
- $\star$ A recebe 1 e B, 3: A passa, B aposta, A passa ..... A recebe $-\$1$.
- $\star$ A recebe 2 e B, 1: A passa, B aposta, A passa ..... A recebe $-\$1$.
- $\star$ A recebe 2 e B, 3: A passa, B aposta, A passa ..... A recebe $-\$1$.
- $\star$ A recebe 3 e B, 1: A passa, B aposta, A aposta .... A recebe $\$2$.
- $\star$ A recebe 3 e B, 2: A passa, B passa................ A recebe $\$1$.

Assim, A ganha, em média, $-\$\frac{1}{6}$ (em contrapartida, B *perde*, em média, $-\$\frac{1}{6}$).

Fazendo esta mesma conta para todas as outras 31 possibilidades, temos (verifique! – as estratégias de A estão nas linhas; as de B nas colunas)

Tabela 1

$A \backslash B$	$(1, 1, 4)$	$(1, 2, 4)$	$(3, 1, 4)$	$(3, 2, 4)$
$(1, 1, 2)$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$(1, 1, 3)$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$
$(1, 2, 2)$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$(1, 2, 3)$	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
$(3, 1, 2)$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$
$(3, 1, 3)$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$(3, 2, 2)$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$
$(3, 2, 3)$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$

7.4. Aplicando Programação Linear

É claro que A pretende ganhar o máximo possível neste jogo. Portanto, não pode se ater a uma só estratégia, pois senão B perceberia e conseguiria uma estratégia melhor (por exemplo, se A sempre adotasse a estratégia $(1,2,3)$, B poderia adotar a estratégia $(1,1,4)$ – A perderia em média \$1 a cada 6 partidas). Assim, A deve tomar uma combinação das 8 possíveis estratégias. Seja então x_1 a fração das partidas em que A adotou a estratégia $(1,1,2)$, x_2 a fração das partidas em que A adotou a estratégia $(1,1,3)$, e assim por diante. Observemos que $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 1$.

Da mesma forma, B pretende perder o mínimo possível e não pode adotar uma só estratégia. Assim, definamos y_1, y_2, y_3 e y_4 da mesma maneira. Temos também $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$.

Assim, A ganha (e B perde) em média

$$\sum_{\substack{1\le i\le 8\\1\le j\le 4}} x_i a_{ij} y_j,$$

onde a_{ij} é o número que está na linha i e coluna j da Tabela 1 (observe, por exemplo, que nas x_1y_3 vezes em que A adota $(1,1,2)$ e B adota $(3,1,4)$, A ganha em média $x_1a_{13}y_3 = -\frac{1}{6}x_1y_3$).

Logo A garante ganhar (se B adotar a combinação $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ menos "cara")

$$\min_y \sum_{\substack{1\le i\le 8\\1\le j\le 4}} x_i a_{ij} y_j$$

Nosso primeiro problema de programação linear será formulado de forma a encontrar uma combinação ótima de estratégias para A. Assim, não convém termos as variáveis y_j no nosso problema. Provaremos assim que

$$\min_y \sum_{\substack{1\le i\le 8\\1\le j\le 4}} x_i a_{ij} y_j = \min_j \sum_{1\le i\le 8} a_{ij} x_i$$

Para mostrarmos isso, notemos que, sendo $\min_j \sum_{1\le i\le 8} a_{ij}x_i = m$,

$$\sum_{\substack{1\le i\le 8\\1\le j\le 4}} x_i a_{ij} y_j = \sum_{1\le j\le 4} y_j \left(\sum_{1\le i\le 8} a_{ij} x_i\right) \ge \sum_{1\le j\le 4} y_j m = m$$

para todo y. Em particular,

$$\min_y \sum_{\substack{1\le i\le 8\\1\le j\le 4}} x_i a_{ij} y_j \ge \min_j \sum_{1\le i\le 8} a_{ij} x_i \qquad (II)$$

Agora, fazendo $y_j = 1$, temos $\sum_{\substack{1\le i\le 8\\1\le j\le 4}} x_i a_{ij} y_j = \sum_{1\le i\le 8} a_{ij}x_i$. Desta forma, $\min_y \sum_{\substack{1\le i\le 8\\1\le j\le 4}} x_i a_{ij} y_j \le \sum_{1\le i\le 8} a_{ij}x_i$ para cada j. Em particular,

$$\min_y \sum_{\substack{1\le i\le 8\\1\le j\le 4}} x_i a_{ij} y_j \le \min_j \sum_{1\le i\le 8} a_{ij} x_i \qquad (III)$$

Logo, de (II) e (III),

$$\min_y \sum_{\substack{1\le i\le 8\\1\le j\le 4}} x_i a_{ij} y_j = \min_j \sum_{1\le i\le 8} a_{ij} x_i$$

Assim, nosso primeiro problema de programação é

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \ \min_j \sum_{1\le i\le 8} a_{ij}x_i & \\
\text{sujeito a} \quad \sum_{1\le i\le 8} x_i = 1 & \\
x_i \ge 0 \qquad & (i = 1, 2, \ldots, 8)
\end{aligned}$$

Para eliminar o "mín", usamos o seguinte "truque": tomamos o problema de programação linear equivalente

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \ & z \\
\text{sujeito a} \ & z - \sum_{1\le i\le 8} a_{ij}x_i \le 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 4) \\
& \sum_{1\le i\le 8} x_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8)
\end{aligned} \tag{A}$$

Vamos demonstrar tal equivalência. Seja $z^*, x_1^*, \ldots, x_8^*$ uma solução ótima de (A). Temos que esta solução satisfaz pelo menos uma das restrições $z - \sum_{1\le i\le 8} a_{ij}x_i \le 0$ com igualdade (senão, poderíamos escolher z menor), ou seja, $z^* = \sum_{1\le i\le 8} a_{ij}x_i^*$ para algum j. Logo $z^* = \min_j \sum_{1\le i\le 8} a_{ij}x_i$.

O problema (A) pode ser resolvido com o método simplex. Explicitamente (já fazendo $z = z^+ - z^-$), temos que

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \ & z^+ - z^- \\
\text{sujeito a} \ & z^+ - z^- + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{6}x_6 \le 0 \\
& z^+ - z^- - \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{6}x_6 + \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{3}x_8 \le 0 \\
& z^+ - z^- + \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{6}x_8 \le 0 \\
& z^+ - z^- + \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{6}x_7 + \frac{1}{6}x_8 \le 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, z^+, z^- \ge 0
\end{aligned}$$

Resolvendo o problema, pode-se verificar que uma solução ótima (pode-se verificar que há infinitas) é $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*, x_8^*) = (\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, 0, 0)$, com $z = -\frac{1}{18}$. Assim, A pode ganhar, no máximo, $-\$\frac{1}{18}$, ou seja, perder, no máximo, $\$\frac{1}{18}$ por partida, em média.

Para minimizar o seu prejuízo, B pode resolver o seguinte problema (que pode ser deduzido de modo análogo ao primeiro):

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \ & w \\
\text{sujeito a} \ & w - \sum_{1\le j\le 4} a_{ij}y_j \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8) \\
& \sum_{1\le j\le 4} y_j = 1 \\
& y_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 4)
\end{aligned} \tag{B}$$

Resolvendo o problema (B), podemos encontrar a solução $(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*) = (\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})$, com $w^* = -\frac{1}{18}$. Assim, B pode perder no máximo $-\$\frac{1}{18}$, ou seja, B pode ganhar no máximo $\$\frac{1}{18}$.

Analisando as estratégias ótimas, temos que

♠ Se A receber 1, deve adotar 1 e 3 na proporção 5 : 1.

♠ Se A receber 2, deve adotar 1 e 2 na proporção 1 : 1.

♠ Se A receber 3, deve adotar 2 e 3 na proporção 1 : 1.

Notemos que A deve blefar em 1/6 das vezes que recebe 1 e deve "esconder o jogo" em metade das vezes que recebe 3.

Para B, temos que

♣ Se B receber 1, deve adotar 1 e 3 na proporção 2 : 1.

♣ Se B receber 2, deve adotar 1 e 2 na proporção 2 : 1.

♣ Se B receber 3, deve adotar sempre 4.

Percebemos que B deve blefar em 1/3 das vezes que recebe 1, mas nunca deve "esconder o jogo".

7.5. Considerações finais

Tal procedimento para definição de estratégias é geral e pode ser aplicado a qualquer jogo finito com duas pessoas onde uma pessoa dá pontos para a outra pessoa (ou seja, o jogo tem *soma zero*). Uma primeira tentativa de formalizar uma teoria para jogos deste tipo foi feita por E. Borel em 1921.

A igualdade $w^* = z^*$ neste exemplo não é uma coincidência. Pode-se demonstrar que isto sempre ocorre para todos os jogos deste tipo. Tal teorema é conhecido como *Teorema Minimax* e foi demonstrado pela primeira vez em 1928 por J. von Neumann – como curiosidade, a demonstração original era razoavelmente difícil, envolvendo o teorema do ponto fixo de Brouwer; descobriu-se mais tarde, com o advento da Programação Linear, que este teorema é uma decorrência direta de um teorema importante da Programação Linear: o *teorema da dualidade*. Neste caso, o valor de z^* (ou w^*) é o *valor do jogo*. Se $z^* = w^* = 0$, dizemos que o jogo é *justo*.

8. Mais exercícios

04. Resolva os problemas de programação linear (A) e (B). Tente descrever todos os possíveis valores das combinações de estratégias ótimas.

05. O jogo de Morra (nome infeliz na nossa língua, eu sei. . .) é para dois jogadores. Cada um dos jogadores esconde 1 ou 2 reais e tenta adivinhar, em voz alta, quantos reais o outro jogador escondeu. Se exatamente um dos jogadores acertou seu palpite, este jogador ganha uma quantia igual ao total de reais que foi escondido.

a) Identifique as possíveis estratégias para cada jogador.

b) Encontre os possíveis ganhos de um jogador de acordo com cada par de estratégias.

c) Formule um problema de programação linear que encontra uma combinação de estratégias que maximiza a quantia a ser ganha por um dos jogadores. Resolva tal problema. O jogo é justo?

d) Você provavelmente supôs que os dois jogadores dão seus palpites simultaneamente. Isto seria um tanto estranho se não fosse por escrito, e além disso, a comunicação entre os jogadores seria prejudicada, então vamos supor que A dá seu palpite antes de B. Neste caso, A pode dar seu palpite baseado no palpite de A, gerando novas estratégias além das que você encontrou no item (a). Resolva novamente os itens (a) a (c) considerando agora estes fatos. O jogo continua justo?

9. Referência Bibliográfica

[1] Chvátal, Vašek. Linear Programming. 1983.