36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3
Ensino Médio

Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – ES – MG – PA – RS – RN – SC

Terça-feira, 3 de junho de 2014

A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos e nem consultas a notas ou livros.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue todo o material da prova.
Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

1) Para descobrir a quantidade de divisores positivos de um número inteiro positivo n, basta tomar sua fatoração em primos e calcular o produto dos expoentes dos primos adicionados de 1. Por exemplo, $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ possui $(4+1)(2+1)(1+1) = 30$ divisores positivos. Qual é o menor inteiro positivo com 2014 divisores positivos?

A) $2^2 3^{19} 5^{53}$ **B)** $2^{53} 3^{19} 5^2$ **C)** $2^{52} 3^{18} 5$ **D)** $2^{38} 3^{53}$ **E)** $2^{37} 3^{52}$

2) Roraima Jonas, um arqueólogo aventureiro, ao fugir de uma caverna se depara com quatro portas, numeradas de 1 até 4, e quatro mensagens. As mensagens dizem:

Mensagem 1: *"As portas* 1 *e* 2 *são seguras."*
Mensagem 2: *"Exatamente duas entre as portas* 1, 2 *e* 3 *são seguras."*
Mensagem 3: *"A porta* 1 *é segura."*
Mensagem 4: *"A porta* 3 *é segura."*

Roraima Jones é um estudioso e, por isso, sabe que exatamente uma das mensagens é mentira e exatamente uma das portas não é segura (ativaria uma armadilha). Qual porta Roraima Jonas pode garantir que é segura?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** não há porta que Roraima pode garantir que é segura.

3) Quantas alternativas contêm uma palavra com mais letras que a palavra na alternativa correta?
A) Duas **B)** Três **C)** Quatro **D)** Cinco **E)** Seis

4) Considere um quadrado $ABCD$ de lado 1. Externamente ao quadrado, são formados os triângulos equiláteros ABE, BCF, CDG e DAH. Qual a área do quadrilátero $EFGH$?
A) 2 **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** $2+\sqrt{3}$ **D)** 3 **E)** 6

5) Assinale a alternativa que apresenta o maior dos cinco números.
A) 2014^5 **B)** 3015^4 **C)** 4016^3 **D)** 5017^2 **E)** 6018^1

6) Cada uma de 2014 bolas é pintada de azul, verde ou amarelo e é colocada aleatoriamente em uma de três urnas, uma azul, outra verde e a terceira amarela. Qual é a probabilidade de que cada urna contenha exatamente as bolas com a sua respectiva cor?
A) $\frac{1}{3^{2014}}$ **B)** $\frac{1}{3^{2013}}$ **C)** $\frac{1}{9^{2014}}$ **D)** $\frac{1}{3^{4017}}$ **E)** $\frac{1}{9^{2013}}$

7) O número de 5 dígitos $\overline{xy26z}$, em que cada uma das letras representa um dígito, é divisível por 8, 9 e 11. Qual o valor de x?

A) 3 **B)** 5 **C)** 1 **D)** 4 **E)** 9

8) A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $F_1 = F_2 = 1$. Então

$$\left(1 - \frac{F_2^2}{F_3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{F_3^2}{F_4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{F_4^2}{F_5^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right)$$

é igual a:

A) $\frac{F_{2016}}{F_{2013}^2}$ **B)** $\frac{F_{2014}}{F_{2013}}$ **C)** $\frac{F_{2015}^2}{F_{2013}^2}$ **D)** $\frac{F_{2015}}{2}$ **E)** $\frac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}$

9) Em uma calculadora muito simples não é possível apertar dois dígitos sem apertar algumas das operações $+$, $-$, $\times$ ou $\div$ entre as apertadas dos dígitos. Ao apertar o dígito a calculadora faz a operação imediatamente. A calculadora começa com o 0 no visor e a primeira apertada tem que ser uma operação. Ou seja, primeiro se aperta uma operação, depois um dígito, depois uma operação, e assim por diante. Por exemplo, um jeito para aparecer 29 no visor é apertar $\boxed{+}$ e depois $\boxed{7}$, fazendo aparecer $0 + 7 = 7$ no visor; em seguida, apertar $\boxed{\times}$ e $\boxed{5}$, passando a ter $7 \times 5 = 35$ no visor, e concluir apertando $\boxed{-}$ e $\boxed{6}$ tendo como resultado $35 - 6 = 29$. Assim, é possível obter 29 com 6 apertadas de botão. Pedro quer que apareça o número 100 no visor. Qual o número mínimo de apertadas, contando operações e dígitos, que Pedro tem que fazer na calculadora?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

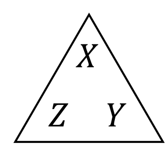
10) Em Portugal, o dia 4 de outubro de 1582 foi o último dia do calendário *juliano*, que foi substituído pelo calendário adotado atualmente, o calendário *gregoriano*. O dia seguinte foi definido como 15 de outubro de 1582, ou seja, não houve os dias 5 a 14 de outubro de 1582.

A única diferença entre os calendários é que, no calendário juliano, todos os anos múltiplos de 4 eram bissextos; no calendário gregoriano, os anos que são múltiplos de 100, mas não de 400, não são bissextos. Assim, 1900 seria um ano bissexto no calendário juliano, mas não no calendário gregoriano.

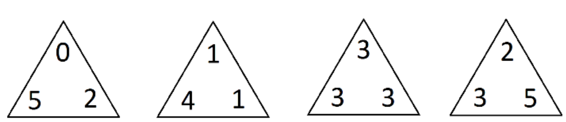
Que dia seria hoje, 3 de junho de 2014, se não tivéssemos mudado de calendário?

A) 20 de maio de 2014 **B)** 21 de maio de 2014 **C)** 22 de maio de 2014
D) 16 de junho de 2014 **E)** 17 de junho de 2014

11) O jogo de *triminó simplificado* é composto por peças na forma de triângulo em que cada um dos vértices possui um número de 0 a 5. Sabe-se que para qualquer peça do triminó simplificado quando se coloca o menor dos números no vértice superior os números estão em ordem crescente no sentido horário, ou seja, a peça faz parte do triminó simplificado quando $X \leq Y \leq Z$.



Por exemplo, das quatro peças a seguir, três primeiras peças fazem parte do jogo, mas a quarta não.



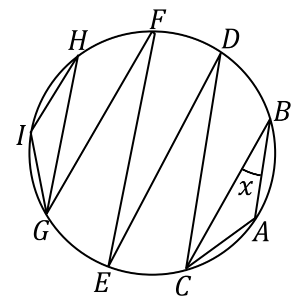
Existem quantas peças em um jogo de triminó simplificado?

A) 216 **B)** 125 **C)** 120 **D)** 56 **E)** 30

12) As raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são diferentes de zero e são os quadrados das raízes da equação $x^2 - bx + a = 0$. As raízes das equações não são necessariamente reais, mas a e b são reais. Então o valor de a é:

A) $-\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** $\sqrt[3]{2}$ **E)** $\sqrt[3]{3}$

13) Considere a figura ao lado, onde os pontos de A até I estão sobre uma circunferência. Sabe-se que os triângulos ABC e GHI são isósceles, que AB, CD, EF e GH são segmentos paralelos e que BC, DE, FG e HI são segmentos paralelos. Qual a medida do ângulo x em graus?



A) $15°$ **B)** $20°$ **C)** $30°$ **D)** $40°$ **E)** $45°$

14) Um *quadrado mágico multiplicativo* é um quadrado $n \times n$ com números inteiros positivos distintos cujos produtos de números na mesma linha, coluna ou diagonal são iguais. Por exemplo, temos o seguinte quadrado mágico multiplicativo:

128	1	32
4	16	64
8	256	2

Qual é menor valor possível do número no centro de um quadrado mágico multiplicativo 3×3?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

15) A soma das raízes da equação $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \frac{3}{3+x} = 1$ é:

A) 0 **B)** 6 **C)** 14 **D)** 11 **E)** 9

16) No triângulo ABC, $AC = 5$ e $AB = 6$. Seja P um ponto sobre a bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$. Se a área de APB é $\frac{3}{2}$, a área de APC é:

A) $\frac{5}{4}$ **B)** $\frac{9}{5}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D)** $\frac{\sqrt{5}}{4}$ **E)** $\frac{4}{5}$

17) Bitonho está jogando em seu celular o *Super Paciência*, cujo objetivo é preencher um tabuleiro 2×2014 com zeros e uns de modo que dois números vizinhos iguais em uma mesma linha impedem que se preencha também com números iguais as casas correspondentes da outra linha. Por exemplo, no desenho abaixo, os valores de A e B não podem ser iguais.

0	1	0	...	1	1	...
1	1	0	...	A	B	...

De quantas maneiras Bitonho pode preencher um tabuleiro de Super Paciência?

A) 3^{2014} **B)** $4 \cdot 3^{2013}$ **C)** 4^{2014} **D)** $2 \cdot 3^{2014}$ **E)** $3 \cdot 4^{2014}$

18) Quantos pares ordenados (a, b) de inteiros positivos existem tais que $\frac{2014}{a^2+b^2}$ é inteiro?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

19) Uma sequência x_n tem como primeiros termos $x_0 = x_1 = 2$ e os demais termos definidos por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$. Qual é o dígito das unidades de $x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots - x_{2013} + x_{2014}$?

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

20) Qual é o número de soluções inteiras (x, y, z) do sistema

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 2z - 15 \\ y^2 - 6z = 2x - 15 \\ z^2 - 6x = 2y - 15 \end{cases} ?$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 8 **E)** infinito

21) Uma esfera de raio 1 tem como equador a base de um cone e passa pelos pontos médios de suas geratrizes. Qual é a altura do cone?

A) 1 **B)** $\sqrt{1,5}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\sqrt{3}$ **E)** 2

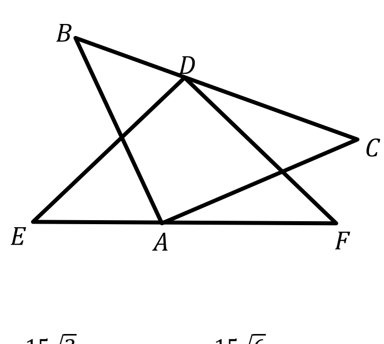
22) Duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, a, b, c, d inteiros positivos, são *íntimas* quando $ad - bc = \pm 1$. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ é íntima de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ pois $1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1$ e $1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$. Duas frações íntimas de $\frac{2014}{51}$ têm denominador menor do que 51. Sendo $\frac{x}{y}$ e $\frac{z}{w}$ essas frações, quanto vale $y \cdot w$?

A) 58 **B)** 68 **C)** 78 **D)** 88 **E)** 98

23) Um caminhão tanque estava cheio de água, mas começou a vazar. Suponha que o consumo de combustível do caminhão seja diretamente proporcional ao peso que carrega e que a vazão da água e a velodidade do caminhão sejam constantes. Após percorrer 200 km, o caminhão estava com metade da capacidade de água e gastou meio tanque de combustível. Se estivesse vazio, o caminhão gastaria, se percorresse a mesma distância nas mesmas condições, um sexto de tanque. Que fração do tanque ele gastaria se não houvesse o vazamento? Despreze a influência do peso do tanque no consumo de gasolina.

A) $\frac{11}{18}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{4}{5}$

24) Na figura, ABC e DEF são triângulos retângulos isósceles com hipotenusas BC e EF medindo 15, D está sobre a reta BC e A está sobre a reta EF. O ângulo agudo entre as retas BC e EF é 30°.



O segmento AD mede:

A) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ **B)** $\frac{15(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$ **C)** $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ **D)** $\frac{15\sqrt{6}}{2}$ **E)** 15

25) Para calcular a probabilidade de uma moeda de raio r cair totalmente dentro de um ladrilho formado com ladrilhos quadrados de lado ℓ, calculamos a probabilidade de seu centro cair dentro de um quadrado menor com lado $\ell - 2r$ (tiramos uma "borda" de tamanho r dos lados do quadrado). Essa probabilidade é igual a $\left(\frac{\ell-2r}{\ell}\right)^2$.

Na Esmeralândia, as moedas são retangulares. Qual é a probabilidade de uma moeda de lados 3 e 4 cair totalmente de um ladrilho formado por retângulos de lados 10 e 20?

A) Menos de $0{,}375$. **B)** Exatamente $0{,}375$. **C)** Mais de $0{,}375$ e menos de $0{,}595$.
D) Exatamente $0{,}595$. **E)** Mais de $0{,}595$.