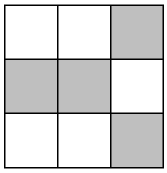
37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase – Nível 3
Ensino Médio

Esta prova também corresponde à prova da Primeira Fase da Olimpíada Regional nos Estados de:
AL – BA – ES – MG – PE – RS – RN – SC

Sexta-feira, 12 de junho de 2015

A duração da prova é de 3 horas.
Cada problema vale 1 ponto.
Não é permitido o uso de calculadoras, aparelhos eletrônicos e nem consultas a notas ou livros.
Você pode solicitar papel para rascunho.
Entregue todo o material da prova.
Ao participar o aluno se compromete a não divulgar o conteúdo das questões até a publicação do gabarito no site da OBM.

1) Violeta quer numerar de 1 a 9 os quadrados do tabuleiro ao lado, de modo que a soma de dois números em quadrados vizinhos (quadrados com lados comuns) seja um número ímpar. Além disso, ela quer que a soma dos números escritos nos quadrados cinza seja a maior soma possível. Qual é a soma dos números escritos nos quadrados brancos?

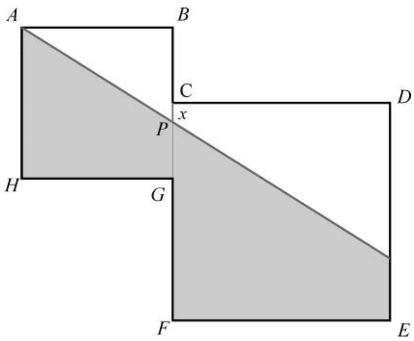


A) 15 **B)** 16 **C)** 22 **D)** 29 **E)** 30

2) Fabiana tem 55 cubos de mesmo tamanho, sendo 10 deles vermelhos, 15 azuis e 30 verdes. Ela quer construir uma torre empilhando esses cubos de modo que dois cubos vizinhos tenham cores diferentes. No máximo, quantos cubinhos ela poderá empilhar?

A) 39 **B)** 51 **C)** 52 **D)** 54 **E)** 55

3) Na figura, os quadrados *ABGH* e *CDEF* têm lados de medidas 4 cm e 6 cm, respectivamente. O ponto *P* pertence à reta contendo os pontos *B*, *C*, *G*, e *F*, sendo *C* o ponto médio do lado *BG*. A semirreta *AP* divide a figura formada pelos dois quadrados em duas regiões, uma branca e uma cinza. Para que essas duas regiões tenham áreas iguais, qual deve ser o valor de $x = CP$?



A) $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{18}{25}$ **C)** 1 **D)** $\frac{26}{25}$ **E)** $\frac{3}{2}$

4) Qual é a soma dos quadrados das quantidades de vogais e consoantes da resposta correta? Não conte as letras A, B, C, D, E das alternativas.

A) Vinte e seis **B)** Setenta e três **C)** Oitenta e cinco
D) Noventa e sete **E)** Cento e dezesseis

5) Dizemos que dois anos *coincidem* se têm a mesma quantidade de dias e os dias da semana de todos os seus dias coincidem. O ano de 2015 coincide com 2009; qual é o próximo ano que coincide com 2015? Lembre-se de que os anos múltiplos de 4 no século XXI (com exceção de 2100) são bissextos e têm 366 dias; os demais anos têm 365 dias.

A) 2021 **B)** 2022 **C)** 2023 **D)** 2025 **E)** 2026

6) Um triângulo tem lados inteiros distintos, o maior deles medindo 2015. Quais são as medidas dos dois outros lados se a área do triângulo é a menor possível?

A) 2 e 2014 **B)** 3 e 2013 **C)** 1006 e 1010 **D)** 1007 e 1009 **E)** 1008 e 1009

7) Esmeralda e Jade saíram da secretaria da OBM e foram para o Jardim Botânico. As duas saíram ao mesmo tempo, Esmeralda de bicicleta e Jade caminhando. A velocidade de Esmeralda é o quádruplo da velocidade de Jade, e as duas velocidades são constantes. Esmeralda chegou ao Jardim Botânico, esperou 5 minutos e depois voltou pelo mesmo caminho, encontrando Jade indo, bem na metade do caminho. Quanto tempo demora a caminhada de Jade da secretaria até o Jardim Botânico?

A) 30 min **B)** 35 min **C)** 40 min **D)** 45 min **E)** 50 min

8) Um número é dito *impadrático* quando é raiz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros ímpares. Por exemplo, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é impadrático, pois é raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Qual dos números a seguir é impadrático?

A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$ **C)** $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ **D)** $\frac{1-\sqrt{7}}{4}$ **E)** $\frac{1-\sqrt{13}}{6}$

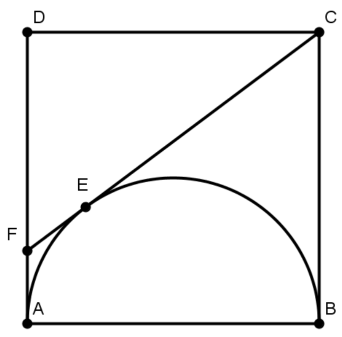
9) Existem quantos números inteiros positivos n tais que ao dividir 2032 por n temos resto 17?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

10) Jonas gosta de observar os relógios digitais espalhados por sua cidade que informam a hora e a data. Por coincidência ele viu que hoje é dia $12/06$ e naquele momento marcava $12:06$, ou seja, data e hora são formados com os mesmos números! Ele ficou encucado com a coincidência e chamou o momento (data e hora) de *encucado*. Ele pensou que também seria interessante se a hora fosse formada com os mesmos números mas na ordem trocada, por exemplo, no dia $21/06$ às $06:21$, então chamou esse momento de *encucado reverso.* Considerando que 2015 não é um ano bissexto, desde $01/01/2015$ às $00:00$ até $31/12/2015$ às $23:59$ quantos momentos são encucados ou encucados reversos?

A) 365 **B)** 455 **C)** 465 **D)** 629 **E)** 699

11) No desenho abaixo, o segmento *CF* é tangente ao semicírculo de diâmetro *AB*. Se *ABCD* é um quadrado de lado 4, determine o comprimento de *CF*.



A) 9/2 **B)** 5 **C)** 11/2 **D)** 23/4 **E)** 6

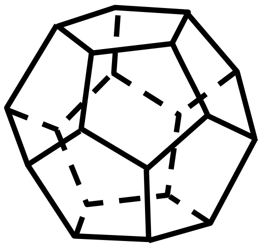
12) No triângulo ABC, $AB = 2$, $BC = \sqrt{2}$. Seja M o ponto médio do lado AB. Se $m(B\hat{A}C) = \alpha$ e $m(B\widehat{M}C) = \beta$ e $m(M\hat{B}C) = \gamma$, então:

A) $\alpha + \beta = \gamma$ **B)** $\alpha + \beta = 2\gamma$ **C)** $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
D) $\alpha + \beta = 90°$ **E)** $\alpha + \beta = 45°$

13) Inicialmente, na tela de um computador, estão escritos os números 1 e 2. A cada segundo, esses dois números são trocados pela soma de seus quadrados e pelo dobro de seu produto. Depois de aproximadamente quanto tempo um desses dois números vai ser maior do que a quantidade de átomos no planeta Terra, que é cerca de 10^{50}?

A) Sete segundos **B)** Sete horas **C)** Sete dias
D) Sete meses **E)** Sete anos

14) Duas retas ou segmentos de retas no espaço são *reversas* quando não existe um plano que contém ambas. Um dodecaedro regular é um poliedro com doze faces pentagonais, todas regulares.



Qual é a maior quantidade de elementos de um conjunto S de arestas de um dodecaedro regular tal que quaisquer dois de seus elementos são reversos?

A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 15

15) Um conjunto finito A de números reais é *parfeito* quando tem pelo menos dois elementos e $\{ab \mid a, b \in A \text{ e } a \neq b\} = A$, ou seja, o conjunto obtido multiplicando-se todos os pares de números distintos de A é o próprio A. Por exemplo, $\left\{1,2,\frac{1}{2}\right\}$ é parfeito pois $\left\{1 \cdot 2, 1 \cdot \frac{1}{2}, 2 \cdot \frac{1}{2}\right\} = \left\{2, \frac{1}{2}, 1\right\}$, mas $\{1,2,3\} \neq \{1 \cdot 2, 1 \cdot 3, 2 \cdot 3\}$ não é parfeito. Quantos elementos pode ter um conjunto parfeito?

A) Somente 3 ou 4 **B)** Qualquer quantidade congruente a 3 ou 4 módulo 4
C) Qualquer quantidade ímpar **D)** Qualquer quantidade prima ímpar
E) Qualquer quantidade maior do que 2

16) Para n inteiro positivo, o *fatorial* de n é $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Não existe n para o qual $n!$ termina em 2015 zeros, mas existe n para o qual $n!$ termina em 2016 zeros. O menor valor de n para o qual isso ocorre é:

A) 8064 **B)** 8065 **C)** 8070 **D)** 8075 **E)** 8080

17) Em cada ponto do plano cartesiano com ambas as coordenadas inteiras, construímos círculos de raio r. O menor valor de r para o qual qualquer circunferência de raio 1 (com centro de coordenadas reais quaisquer) corte algum dos círculos de raio r é:

A) $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1$ **B)** $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\sqrt{2} - 1$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

18) A função *piso*, $\lfloor x \rfloor$, indica o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 3{,}45 \rfloor = 3$ e $\lfloor 41 \rfloor = 41$. Considere a função f, definida nos inteiros não negativos, tal que $f(0) = 0$ e $f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor\right) + n - 10\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor$. Quantos algarismos tem o menor inteiro positivo m tal que $f(m) = 2015$?

A) 201 **B)** 202 **C)** 222 **D)** 223 **E)** 224

19) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos tais que $n(A) = 5$ e $n(B) = 7$, em que $n(X)$ é a quantidade de elementos do conjunto X. Quantos subconjuntos não-vazios C de $A \cup B$ são tais que $n(A \cap C) = n(B \cap C)$?

A) 790 **B)** 791 **C)** 792 **D)** 793 **E)** 794

20) Existem quantos múltiplos de 99 com quatro dígitos distintos? Lembre-se de que números com quatro algarismos não podem começar com zero à esquerda; em particular, 0123 = 123 tem três algarismos.

A) 18 **B)** 27 **C)** 45 **D)** 72 **E)** 90

21) O polinômio não constante $P(x)$ tem coeficientes inteiros e é tal que $P(0) = 2015$. No máximo quantas raízes inteiras distintas tem $P(x)$?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

22) Dados cinco pontos no plano, sem três deles colineares, no mínimo quantos dos ângulos determinados por três desses cinco pontos são obtusos (ou seja, medem mais do que 90°)?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

23) No triângulo ABC, $AB = 40$, $AC = 42$ e $BC = 58$. As bissetrizes internas de $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ cortam novamente a circunferência circunscrita de ABC em K, L e M, respectivamente. As retas tangentes à circunferência circunscrita de ABC que passam por K, L e M determinam um triângulo cujo menor lado é:

A) $\frac{290}{3}$ **B)** 58 **C)** 145 **D)** $\frac{145}{2}$ **E)** $\frac{2900}{17}$

24) Os inteiros positivos x e y são tais que $\frac{1}{2015} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Qual é o menor valor possível para $x + y$?

A) 2015 **B)** 2016 **C)** 3264 **D)** 4836 **E)** 9672

25) Sabendo que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

então

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{1^2 2^2} + \frac{1}{2^2 3^2} + \frac{1}{3^2 4^2} + \cdots$$

é igual a:

A) $\frac{\pi^2}{6} - 1$ **B)** $\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$ **C)** $\frac{\pi^2}{3} - 3$ **D)** $\frac{\pi^2}{3} + 1$ **E)** $\frac{\pi^4}{9} - 2$