38^{a} OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

1^{a} Fase – Nível Universitário

Olimpíada Brasileira de Matemática

---

1. Encontre, com justificativa, todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e constantes reais a, b, c tais que

$$f(ax+b)+c \leq x \leq f(x+c)+b$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

---

2. Seja $\alpha \geq 1$ um número real. No plano cartesiano, onde convencionamos que a distância unitária é igual a 1 metro, considere os pontos $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$ e a reta $\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$. Sonic, o porco-espinho, está no ponto A e quer correr até o ponto B tocando na parede ℓ. Antes de tocar na parede, Sonic tem velocidade de 1 metro por segundo e após tocar na parede ele ganha um impulso e passa a ter velocidade de α metros por segundo. Sonic quer minimizar o tempo gasto em seu trajeto.

(i) Prove que há exatamente um ponto $(0, y(\alpha)) \in \ell$ no qual Sonic deve tocar a parede para realizar seu trajeto no tempo mínimo.

(ii) Encontre o valor de α para o qual $y(\alpha) = \frac{1}{4}$.

(iii) Determine o valor de $\theta \in \mathbb{R}$ para o qual o limite

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{\theta} \cdot y(\alpha)$$

existe e é não-nulo. Calcule o valor do limite neste caso.

---

3. Encontre todas as matrizes 2×2 com entradas reais A tais que:

$$A^3 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

onde I denota a matriz identidade 2×2.

---

4. Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais não-negativos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 = 1$.

(i) Encontre o máximo valor de

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)^2.$$

(ii) Determine todas as sequências $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ para as quais este máximo é atingido.

---

5. Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $A(x, y, z) = (x + y + z, x + y)$. Prove que existe um único $s \geq 0$ tal que o limite

$$c = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{vol}\big(\{v \in \mathbb{R}^3;\ |v| \leq 1 \text{ e } |Av| < \varepsilon\}\big)}{\varepsilon^s}$$

existe e é positivo, e determine s e c.

---

6. No plano cartesiano, seja S o conjunto das circunferências com centros de coordenadas racionais e com raios de comprimentos racionais. Mostre que existe um polígono regular de 2016 lados, cujos vértices não pertencem a S.