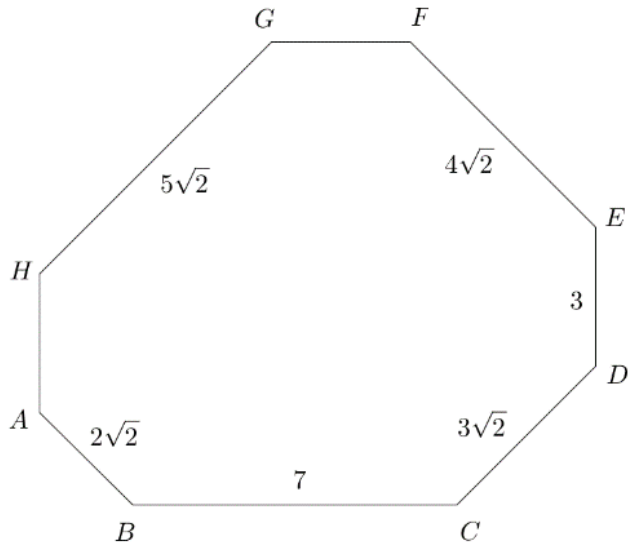
37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)

PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. Qual é menor número inteiro positivo que deixa cinco restos diferentes quando dividido por 2, 3, 4, 5 e 6?

02. João cortou os quatro cantos de uma folha retangular e obteve o um octógono equiângulo $ABCDEFGH$, como mostra a figura abaixo. Sabendo que $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 7$, $CD = 3\sqrt{2}$, $DE = 3$, $EF = 4\sqrt{2}$ e $GH = 5\sqrt{2}$, determine a área desse octógono.



03. O professor Piraldo passou para Esmeralda uma equação da forma $ax = b$, sendo a e b reais. Esmeralda se enganou e resolveu a equação $bx = a$, obtendo uma solução que é igual à correta menos 60. Se a solução correta é da forma $m + \sqrt{n}$ com m e n inteiros, qual é o valor de $m + n$?

04. Uma fábrica possui várias caixas, cada uma com capacidade de 31 litros. Ela fabricou 2015 garrafas de água, cada uma com 3 litros, e 2015 garrafas de suco de laranja, cada uma com 5 litros. Cada caixa acomoda qualquer quantidade de garrafas, desde que seu volume total não ultrapasse a sua capacidade. Não é permitido abrir as garrafas. Qual é a quantidade mínima de caixas que a fábrica deve usar para armazenar todas as garrafas fabricadas?

05. Os números reais x, y e z satisfazem o sistema de equações:

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{y} = 2015$$
$$\frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 37$$

Determine o inteiro mais próximo de $\frac{x}{y}$.

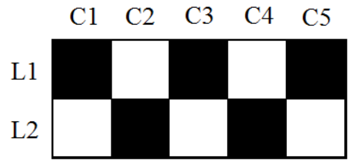
06. Duas circunferências C_1 e C_2 se intersectam nos pontos A e B. A tangente a C_1 por A corta C_2 novamente no ponto P e a tangente a C_2 por A corta C_1 novamente no ponto Q. Sabendo que $PB = 640$ e $QB = 1000$, determine o comprimento do segmento AB.

37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)

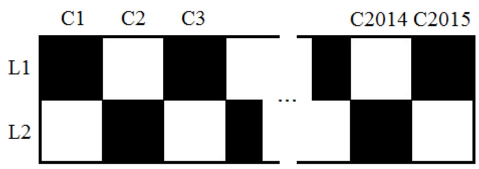
PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1

Maria possui um tabuleiro 2×5 dividido em quadradinhos 1×1, pintados alternadamente de preto e branco como um tabuleiro de xadrez. Associado a cada linha e a cada coluna existe um botão que troca a cor, de preto para branco ou de branco para preto, de cada quadradinho da linha ou coluna correspondente.



a) Considerando o tabuleiro com a coloração inicial dada na figura acima, desenhe o tabuleiro 2×5 com as cores de cada quadradinho após Maria apertar os botões $L2$, $C1$ e $C4$.
b) Considerando novamente o tabuleiro com a coloração inicial dada na figura acima, desenhe o tabuleiro 2×5 com as cores de cada quadradinho após Maria apertar os botões $L1$, $C2$, $C3$ e $C5$.
c) Maria trocou seu tabuleiro 2×5 por um tabuleiro 2×2015, como indicado na figura abaixo.



Associado a cada linha e a cada coluna existe um botão que troca a cor de cada quadradinho da linha ou coluna correspondente, num total de $2 + 2015 = 2017$ botões. Quantas colorações diferentes do tabuleiro podem ser obtidas apertando-se alguns dos botões?

PROBLEMA 2

Determine o número de inteiros positivos n menores que 100 de modo que a fração $\frac{8n+5}{5n+8}$ não seja irredutível.

Uma fração é chamada de irredutível quando o máximo divisor comum (MDC) entre o seu numerador e o seu denominador é igual a 1.

PROBLEMA 3

No triângulo acutângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ mede 45°. Sejam BE e CF alturas com E sobre AC e F sobre AB, e O o circuncentro de ABC, ou seja, o centro do círculo que passa por A, B e C. Calcule a medida do ângulo $E\hat{O}F$.