37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE A
(Cada problema vale 5 pontos)

01. O professor Piraldo passou para Esmeralda uma equação da forma $ax = b$, sendo a e b reais. Esmeralda se enganou e resolveu a equação $bx = a$, obtendo uma solução que é igual à correta menos 60. Se a solução correta é da forma $m + \sqrt{n}$ com m e n inteiros, qual é o valor de $m + n$?

02. Duas circunferências C_1 e C_2 se intersectam nos pontos A e B. A tangente a C_1 por A corta C_2 novamente no ponto P e a tangente a C_2 por A corta C_1 novamente no ponto Q. Sabendo que $PB = 640$ e $QB = 1000$, determine o comprimento do segmento AB.

03. Três pontos A, B e C são marcados no bordo de um círculo de modo que $m\left(B\hat{A}C\right) = 60°$, $m\left(A\hat{B}C\right) = 80°$ e $m\left(A\hat{C}B\right) = 40°$. Escolhemos ao acaso um ponto X no interior do círculo. A probabilidade de que, entre os pontos A, B e C, o mais distante de X seja B é $\frac{p}{q}$, em que p e q são primos entre si. Quanto vale $p \cdot q$?

04. Um subconjunto de 5 elementos do conjunto $\{1,2,3,\dots,20\}$ é dito *largo* se ao colocar os seus elementos em ordem crescente tivermos a propriedade de que a diferença do segundo menos o primeiro é maior que 1, do terceiro para o segundo é maior que 2, do quarto para o terceiro é maior que 3 e do quinto para o quarto é maior que 4. Existem quantos subconjuntos largos?

05. Sejam f e g funções dos inteiros não negativos nos inteiros não negativos tais que $f(0) = g(0) = 0$, $f(2x+1) = g(x)$, $g(2x) = f(x)$ e $f(2x) = g(2x+1) = x$ para todo x inteiro não negativo. Quantos valores de n tais que $0 \leq n \leq 2015$ satisfazem $f(n) = 0$?

06. Os reais a, b e c satisfazem as equações

$$\frac{1}{ab} = b + 2c, \quad \frac{1}{bc} = 2c + 3a, \quad \frac{1}{ca} = 3a + b.$$

Temos $(a+b+c)^3 = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q > 0$. Calcule $p + q$.

37ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE B
(Cada problema vale 10 pontos)

PROBLEMA 1
Considere um tabuleiro 2015×37, pintado como um tabuleiro de xadrez. Cada linha e coluna tem um botão que inverte a cor de cada casinha da linha ou coluna correspondente, num total de $2015 + 37 = 2052$ botões. Quantas colorações diferentes do tabuleiro podem ser obtidas?

PROBLEMA 2
Seja $ABCD$ um paralelogramo com $AB = 8$ e $BC = 4$. O círculo Γ passa por A, C e pelo ponto médio M de BC, e corta o lado CD no ponto $P \neq C$. Sabe-se que AD é tangente a Γ. Calcule a medida do segmento MP.

PROBLEMA 3
Qual é o menor inteiro $a > 1$ para o qual existe n inteiro positivo tal que $a^{2^n} - 1$ é múltiplo de 2015?