38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

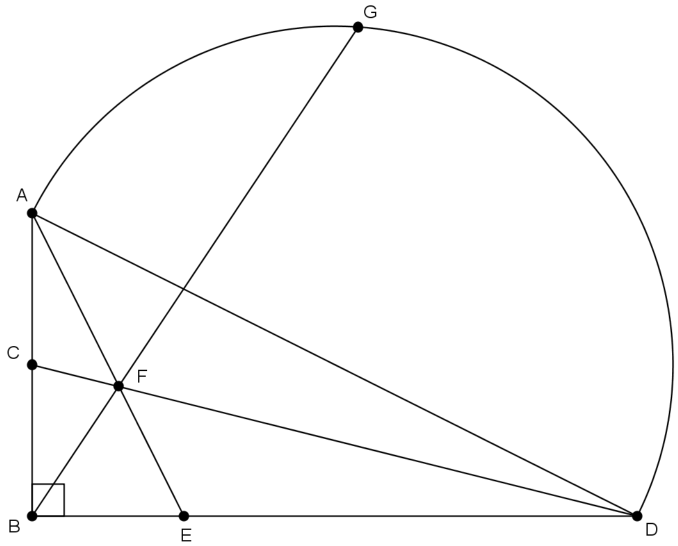
PARTE A - Cada problema vale 5 pontos

Olimpíada Brasileira de Matemática

1. Considere a sequência de números $1, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, \ldots$ em que escrevemos os números de 1 até 1!, de 1 até 2!, de 1 até 3! e assim por diante. Veja que cada posição dessa sequência é ocupada por um número. Por exemplo, na primeira vez que o número 5 aparece na sequência ele ocupa a posição 8. Determine qual número ocupa a posição 10000.

2. Seja r uma raiz da equação $x^2 - 12x - 12 = 0$. Sabe-se que r também é raiz da equação $x^4 - ax^3 - b = 0$, sendo a e b racionais positivos. Calcule $a + b$.

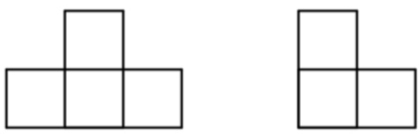
3. Na figura abaixo, $AB = 4$, $BD = 8$, $CB = BE = 2$ e AGD é um semicírculo de diâmetro AD. Sendo $AG/GD = p/q$, com p e q inteiros positivos primos entre si, calcule p^q.



4. Determine o menor inteiro positivo n tal que existem dois triângulos retângulos não congruentes com lados de medida inteira e perímetro n.

5. As raízes de um polinômio P, de coeficientes inteiros e grau 10, são todas inteiras e distintas. Então todo valor não nulo de $P(n)$, n inteiro, tem no mínimo quantos divisores positivos?

6. A figura a seguir apresenta peças de dois tipos: o Tipo 1, com 4 quadradinhos, e o Tipo 2, com 3 quadradinhos. Um tabuleiro com m linhas e n colunas foi coberto, sem sobreposição, com peças do Tipo 1 com a exceção de 3 quadradinhos. Então, o mesmo tabuleiro foi coberto, também sem sobreposição, com peças do Tipo 2 com exceção de 2 quadradinhos. As peças podem ser giradas, mas não podem sair do tabuleiro.
Qual é o menor valor possível para o produto $m \cdot n$?



Tipo 1 Tipo 2

38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PARTE B - Cada problema vale 10 pontos

PROBLEMA 1. Janaína quer pintar as casas de um tabuleiro 7×7 de vermelho, azul ou de marrom, da seguinte maneira: em cada linha, o número de casas vermelhas não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores e, em cada coluna, o número de casas azuis não pode ser menor que o número de casas com cada uma das outras cores. Quantas casas serão pintadas de marrom?

PROBLEMA 2. Dois círculos Γ e Ω se cortam em A e G. A reta t tangencia Γ em B e Ω em C. Se G é o baricentro de ABC, qual é o maior valor possível do ângulo $B\hat{A}C$?

PROBLEMA 3. Em Combinatória, existem os *q-análogos* de contas combinatórias; basicamente, trocamos n por $[n]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$. Por exemplo, o *q-fatorial* é

$$[n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \cdots [n]_q = 1(1+q)\dots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}).$$

Sendo $\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$, com quantos zeros termina o 3-binomial $\binom{2016}{38}_3$?