38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

3ª Fase – Nível 1 (6º ou 7º ano)

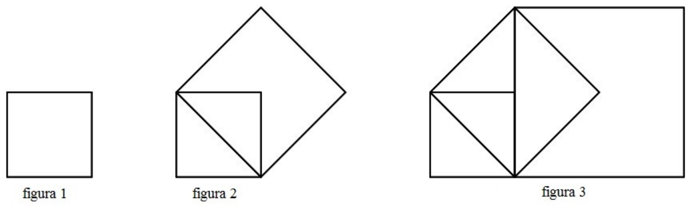
Olimpíada Brasileira de Matemática

PROBLEMA 1. Quatro times de futebol irão disputar um campeonato no qual cada time joga uma única vez com todos os demais times. Cada vitória vale 3 pontos e cada empate vale 1 ponto e as derrotas não pontuam. Nesse campeonato,

a) se o campeão conseguir 9 pontos, o vice 6 pontos e o terceiro 3 pontos, quantos pontos obterá o quarto colocado?

b) se o campeão conseguir 5 pontos, dois times acabarem na mesma posição com 3 pontos cada um e o último obtiver 2 pontos, quantos empates terão acontecido?

PROBLEMA 2. Janaína desenha uma sequência de figuras conforme a ilustração a seguir. Cada figura tem um quadrado a mais do que a figura anterior e esse quadrado que foi acrescentado tem lado igual à diagonal do maior quadrado da figura anterior. Além disso, todos os quadrados de cada figura têm um vértice comum. O quadrado da figura 1 tem área de 2 cm^2.



a) Qual é a área do quadrado maior da figura 2?

b) Qual é a área total da figura 3?

c) Qual é a área total da figura 6?

PROBLEMA 3. Os números inteiros de 1 a 99 são dividido em n grupos, obedecendo as seguintes regras:

I- cada número pertence a somente um grupo;

II- cada grupo tem pelo menos dois números;

III- se dois números pertencem a um mesmo grupo, então a sua soma não é um número divisível por 3.

Sabendo disso:

a) Explique porque o número n de grupos não pode ser 50.

b) Qual é o menor número n possível?

PROBLEMA 4. Carlinhos fez uma lista de todos os números de quatro algarismos distintos nas seguintes condições: a soma dos algarismos é 12, dois deles são pares e dois são ímpares. O número 2703, por exemplo, está nessa lista. Lembre-se de que zero é par e nenhum número começa com zero à esquerda.

a) Qual é o número mais próximo de 2016 que está na lista de Carlinhos?

b) Determine a soma de todos os números da lista de Carlinhos que são menores que 2016.

PROBLEMA 5. Seja N um inteiro, $N \geq 2$.
O jogo da OBM tem a participação de dois jogadores A e B e começa com o jogador A recebendo o número N. Ele então deve escolher um novo número n, com n e N primos entre si e n maior ou igual à metade de N e menor do que N. Esse número n é passado para o jogador B.
O jogador B, então, recebe o número n de seu oponente e deve escolher um novo número m, com m e n primos entre si e m maior ou igual à metade de n e menor do que n. Ele, então, passa para o seu oponente A o número m e o processo se repete até que um dos jogadores somente possa escolher o número 1. Esse jogador é o vencedor!
Por exemplo, para $N = 9$, o jogador A pode escolher o número 5 (observe que as suas opções são 5, 7 ou 8); o B jogador pode então escolher o número 3; A é obrigado a escolher o número 2 (essa é a única opção respeitando as regras do jogo) e, então, B escolhe 1 e vence.
Determine para cada valor de N a seguir, qual jogador possui estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer não importando quais sejam as jogadas de seu oponente.

a) $N = 7$.

b) $N = 2016$.

Observação: dizemos que dois números são primos entre si se não possuem um divisor comum maior ou igual a 1. Veja que 9 e 6 não são primos entre si, pois 3 é um divisor comum.