38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

3ª Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

PROBLEMA 1.

a) Considere todos os números formados usando os quatro algarismos 1, 2, 3 e 4. Formamos a seguinte expressão numérica

$$S_4 = 4321 - 4312 + 4231 - 4213 + \ldots + 1243 - 1234,$$

na qual os números são listados da esquerda para a direita do maior para o menor, e os sinais $+$ e $-$ alternam-se até o final. Calcule o valor de S_4.

b) De modo análogo, tomamos todos os números de nove algarismos distintos e não nulos e formamos a expressão numérica

$$S_9 = 987654321 - 987654312 + 987654231 - \ldots - 123456789,$$

na qual os números são listados da esquerda para a direita do maior para o menor, e os sinais $+$ e $-$ alternam-se até o final. Calcule o valor de S_9.

PROBLEMA 2. As bissetrizes internas dos ângulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ do triângulo ABC se encontram no ponto I. A reta paralela a BI que passa pelo ponto A encontra a reta CI no ponto D. A reta paralela a CI por A encontra a reta BI no ponto E. As retas BD e CE se encontram no ponto F. Mostre que F, A e I são colineares se, e somente se, $AB = AC$.

PROBLEMA 3. Os números reais a, b, r e s são tais que as raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{s}$ e as raízes da equação $x^2 - rx + s = 0$ são a e b. Sabendo que $a > 0$, encontre o seu valor.

38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

3ª Fase – Nível 2 (8º ou 9º ano)

SEGUNDO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

PROBLEMA 4. Considere um triângulo escaleno ABC com $AB < AC < BC$. A mediatriz do lado AB corta o lado BC no ponto K e o prolongamento de AC no ponto U. A mediatriz do lado AC corta o lado BC no ponto O e o prolongamento do lado AB no ponto G. Prove que o quadrilátero $GOKU$ é cíclico, ou seja, que seus quatro vértices estão em uma mesma circunferência.

PROBLEMA 5. Uma permutação $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ dos números do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ é *legal* se não existem dois termos consecutivos cuja soma é um múltiplo de 3 e se os dois vizinhos de um termo qualquer não diferem por um múltiplo de 3. Por exemplo, $(4, 6, 2, 5, 3, 1)$ é uma permutação *legal* dos números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Entretanto, $(1, 2, 5, 3, 4, 6)$ não é uma permutação *legal* do mesmo conjunto, pois os números 1 e 2 são vizinhos e sua soma é um múltiplo de 3. Além disso, outra razão para ela não ser *legal*, é que os vizinhos do número 4, que são o 3 e o 6, diferem por um múltiplo de 3.

a) Determine o número de permutações *legais* do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Determine o número de permutações *legais* do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$

Observação: Uma permutação de um conjunto é uma sequência ordenada contendo cada um de seus elementos uma única vez.

PROBLEMA 6. Seja $a_0 = a > 1$ um inteiro e, para $n \geq 0$, defina $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$. Mostre que o conjunto dos divisores primos dos termos da sequência a_n é infinito.