38^{a} OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

3^{a} Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

PROBLEMA 1. Seja ABC um triângulo. As retas r e s são as bissetrizes internas de $\angle ABC$ e $\angle BCA$, respectivamente. Os pontos E sobre r e D sobre s são tais que $AD \parallel BE$ e $AE \parallel CD$. As retas BD e CE se cortam em F. Seja I o incentro do triângulo ABC. Mostre que se os pontos A, F e I são colineares então $AB = AC$.

PROBLEMA 2. Encontre o menor n tal que qualquer conjunto de n pontos do plano cartesiano, todos com coordenadas inteiras, contém dois cujo quadrado da distância é um múltiplo de 2016.

PROBLEMA 3. Seja k um inteiro positivo fixado. Alberto e Beralto participam do seguinte jogo: dado um número inicial N_0 e começando por Alberto, eles alternadamente fazem a seguinte operação: trocar um número n por um número m tal que $m < n$ e n e m diferem, na sua representação em base 2, exatamente em ℓ dígitos consecutivos para algum ℓ tal que $1 \le \ell \le k$. Quem não conseguir jogar perde.

Dizemos que um inteiro não negativo t é *vencedor* quando o jogador que recebe o número t tem uma estratégia vencedora, ou seja, consegue escolher os números seguintes de modo a garantir a vitória, não importando como o outro jogador faça suas escolhas. Caso contrário, dizemos que t é *perdedor*.

Prove que, para todo N inteiro positivo, a quantidade de inteiros não negativos perdedores e menores do que 2^N é $2^{N-\lfloor \log_2(\min\{k,N\}) \rfloor}$.

Observação: $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor 3{,}14 \rfloor = 3$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$ e $\lfloor -4{,}6 \rfloor = -5$.

38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

3ª Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA

Olimpíada Brasileira de Matemática

PROBLEMA 4. Qual é a maior quantidade de inteiros positivos menores ou iguais a 2016 que podemos escolher de modo que não haja dois números cuja diferença é 1, 2 ou 6?

PROBLEMA 5. Considere o polinômio do segundo grau $P(x) = 4x^2 + 12x - 3015$. Defina a sequência de polinômios $P_1(x) = \frac{P(x)}{2016}$ e $P_{n+1}(x) = \frac{P(P_n(x))}{2016}$ para todo inteiro $n \geq 1$.

(a) Prove que existe um número real r tal que $P_n(r) < 0$ para todo inteiro positivo n.

(b) Determine a quantidade de inteiros m tais que $P_n(m) < 0$ para infinitos inteiros positivos n.

PROBLEMA 6. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, não circunscritível, sem lados paralelos. As retas AB e CD se cortam em E. Seja $M \neq E$ a interseção dos circuncírculos de ADE e BCE. As bissetrizes internas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro I e as bissetrizes externas de $ABCD$ determinam um quadrilátero convexo cíclico de circuncentro J. Prove que I, J e M são colineares.