38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase – Nível Universitário

PRIMEIRO DIA

---

1. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de números reais tal que $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

---

2. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f\big(x^2 + y^2 f(x)\big) = xf(y)^2 - f(x)^2$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

---

3. Seja $k \geq 1$ um inteiro. Definimos a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = ka_n + a_{n-1}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Seja p um número primo ímpar. Denote por $m(p)$ o menor inteiro positivo i tal que $p|a_i$. Denote por $T(p)$ o menor inteiro positivo tal que para qualquer natural j temos $p \mid a_{j+T(p)} - a_j$.

(i) Mostre que $T(p) \leq m(p)(p-1)$.

(ii) Se $T(p) = m(p)(p-1)$, mostre que

$$\prod_{\substack{1\leq j\leq T(p)-1 \\ j\not\equiv 0 \pmod{m(p)}}} a_j \equiv (-1)^{m(p)-1} \pmod{p}.$$

38ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

2ª Fase – Nível Universitário

SEGUNDO DIA

4. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & -3 \end{pmatrix}.$$

Encontre todos os pares de números $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ com $|m| \leq n$ tais que

$$A^n - (n^2 + m)A$$

tenha todas as entradas inteiras.

5. Uma bola de futebol é usualmente obtida a partir de uma figura poliédrica que possui faces de dois tipos, hexágonos e pentágonos, e em cada vértice incidem três faces, sendo dois hexágonos e um pentágono.
Diremos que um poliedro é *futebolístico*, se é semelhante à bola de futebol no seguinte sentido: possui as faces sendo m-ágonos ou n-ágonos (com $m \neq n$) e em cada vértice incidem três faces, sendo dois m-ágonos e um n-ágono.

(i) Prove que m deve ser par.

(ii) Encontre todos os poliedros futebolísticos.

6. Sejam $C, D > 0$. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *bonita* se f é de classe C^2, $|x^3 f(x)| \leq C$ e $|xf''(x)| \leq D$ para todo x com $|x| \geq 1$.

(i) Prove que se f é uma função bonita então, dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 > 0$ tal que, para $|x| \geq x_0$, $|x^2 f'(x)| < \sqrt{2CD} + \varepsilon$.

(ii) Prove que, se $0 < E < \sqrt{2CD}$, então existe uma função bonita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x_0 > 0$, existe $x > x_0$ com $|x^2 f'(x)| > E$.