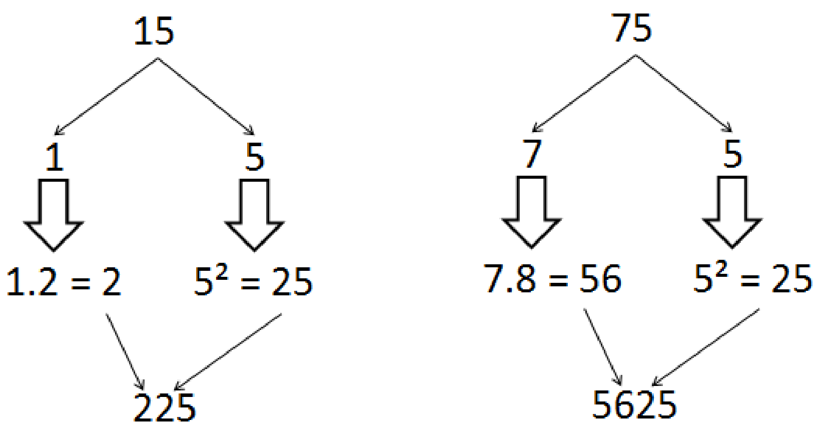
Por que o quadrado de terminados em 5 é tão fácil? Ex.: $\underline{1}5^2=\underline{2}25$, $\underline{7}5^2=\underline{56}25$,...

0) O que veremos na aula de hoje?

- Um fato interessante
- Produtos notáveis
- Equação do 2º grau
- Como fazer a questão 5 da 3ª fase do nível 2 da OBM -2012?

1) Um fato interessante

Vocês já perceberam que fazer o quadrado de números terminados em 5 é fácil? Vejamos:



Interessante, não? Será que isto dá certo para todo número terminado em 5? Na aula de hoje, vamos aprender se o este fato curioso sobre os quadrados dos números terminados em 5 é apenas coincidência ou não. Para isso, precisamos aprender primeiro sobre produtos notáveis.

2) Produtos notáveis:

São expressões algébricas que aparecem com grande frequência em diversos contextos, inclusive nos problemas de olimpíada de matemática. Na aula de hoje, veremos alguns deles.

2.1) Quadrado da soma:

$$\forall a, b \; reais \; temos \; que: \boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2}$$

Para entender melhor, vejamos alguns exemplos numéricos:

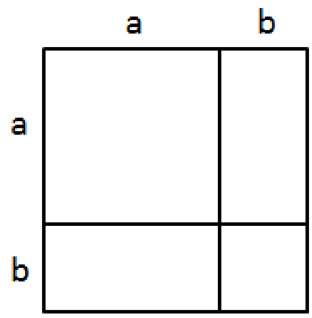
- $(2+3)^2 = 2^2 + 2.2.3 + 3^2 \leftrightarrow 5^2 = 4 + 12 + 9 \leftrightarrow 25 = 25 \;\; OK!$
- $(7+10)^2 = 7^2 + 2.7.10 + 10^2 \leftrightarrow 17^2 = 49 + 140 + 100 \leftrightarrow 289 = 289 \;\; OK!$
- $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + 2.1.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} \leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \;\; OK!$
- $(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2.\sqrt{2}.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \leftrightarrow (2.\sqrt{2})^2 = 2 + 2.2 + 2 \leftrightarrow 2^2.(\sqrt{2})^2 = 8 \leftrightarrow 4.2 = 8 \; OK!$

Agora, vejamos como provar a fórmula do quadrado da soma.

Prova algébrica:

$$(a+b)^2=(a+b).(a+b)=a.(a+b)+b.(a+b)=a.a+a.b+b.a+b.b=\boxed{a^2+2.a.b+b^2}$$

Prova geométrica:



Na figura ao lado, temos que:

$$\text{Área total} = \underbrace{(a+b)^2}_{\substack{\text{quadrado maior}\\ \text{de lado }(a+b)}} = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{de lado } a}} + \underbrace{2.a.b}_{\substack{2\text{ retângulos}\\ \text{de lados } a \text{ e } b}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{de lado } b}}$$

2.2) Quadrado da diferença:

$$\forall a,b \text{ reais temos que}: \boxed{(a-b)^2=a^2-2.a.b+b^2}$$

Para entender melhor, vejamos alguns exemplos numéricos:

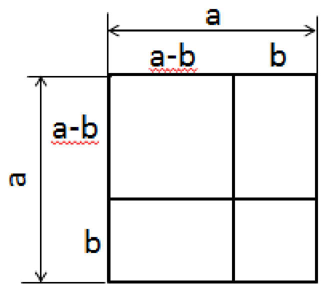
- $(3-2)^2=3^2-2.2.3+2^2 \leftrightarrow 1^2=9-12+4 \leftrightarrow 1=1\ OK!$
- $(7-10)^2=7^2-2.7.10+10^2 \leftrightarrow (-3)^2=49-140+100 \leftrightarrow 9=9\ OK!$
- $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=1^2-2.1.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2=1-1+\frac{1}{4} \leftrightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ OK!$
- $\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-2.\sqrt{2}.\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 \leftrightarrow (0)^2=2-2.2+2 \leftrightarrow 0=4-4\ OK!$

Agora, vejamos como provar a fórmula do quadrado da diferença.

Prova algébrica:

$$(a-b)^2=(a-b).(a-b)=a.(a-b)-b.(a-b)=a.a-a.b-b.a+b.b=\boxed{a^2-2.a.b+b^2}$$

Prova geométrica:



$$\text{Área total} = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{de lado } a}} = \underbrace{(a-b)^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{de lado }(a-b)}} + \underbrace{2.(a-b).b}_{\substack{2\text{ retângulos}\\ \text{de lados }(a-b)\text{e } b}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{de lado } b}}$$

$$a^2 = (a-b)^2+2.a.b-2.b^2+b^2=(a-b)^2+2.a.b-b^2$$

$$\boxed{a^2-2.a.b+b^2=(a-b)^2}$$

2.3) Produto da soma pela diferença:

$$\forall a,b \text{ reais temos que}: \boxed{(a+b).(a-b)=a^2-b^2}$$

Para entender melhor, vejamos alguns exemplos numéricos:

- $(3+2).(3-2)=3^2-2^2 \leftrightarrow 5.1=9-4 \leftrightarrow 5=5\ OK!$
- $(7+10).(7-10)=7^2-10^2 \leftrightarrow 17.(-3)=49-100 \leftrightarrow -51=-51\ OK!$
- $\left(1+\frac{1}{2}\right).\left(1-\frac{1}{2}\right)=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leftrightarrow \frac{3}{2}.\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4} \leftrightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{4}\ OK!$

- $(\sqrt{2}+\sqrt{2}).(\sqrt{2}-\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 \leftrightarrow (2.\sqrt{2}).0 = 2-2 \leftrightarrow 0 = 0\ \ OK!$

Agora, vejamos como provar a fórmula do produto da soma pela diferença.

Prova algébrica:

$$(a+b).(a-b) = a.(a-b) + b.(a-b) = a.a - a.b + b.a - b.b = \boxed{a^2 - b^2}$$

3) Exercícios:

3.1) Prove algebricamente os seguintes produtos notáveis:

a) $(a+1)^2 = a^2 + 2.a + 1$
b) $(b-2)^2 = b^2 - 4.b + 4$
c) $(a+b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$
d) $(a+1)^3 = a^3 + 3.a^2 + 3.a + 1$
e) $(a-b)^3 = a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - b^3$
f) $a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - a.b + b^2)$
g) $a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + a.b + b^2)$
h) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2a.b + 2a.c + 2.b.c$
i) $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2a.b - 2a.c - 2.b.c$
j) $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a.b - 2a.c + 2.b.c$
k) $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2a.b + 2a.c + 2.a.d + 2.b.c + 2.b.d + 2.c.d$

Obs.: Algumas fórmulas de produtos notáveis podem ser generalizadas:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a^n - b^n = (a-b).(a^{n-1} + a^{n-2}.b + a^{n-3}.b^2 + \cdots + a^2.b^{n-3} + a.b^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\forall n impar: a^n + b^n = (a+b).(a^{n-1} - a^{n-2}.b + a^{n-3}.b^2 - \cdots + a^2.b^{n-3} - a.b^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}_{\substack{quadrado\ da \\ soma\ de\ n\ reais}} = \underbrace{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}_{\substack{soma\ dos \\ quadrados\ dos\ n\ reais}} + \underbrace{2.(x_1.x_2 + x_1.x_3 + \cdots + x_{n-1}.x_n)}_{\substack{2\ vezes\ \ a\ soma\ de\ todos\ os \\ produtos\ 2\ a\ 2\ dos\ n\ reais}}$$

3.2) Sabemos que todo número natural terminado em 5 pode ser escrito na forma (10.K+5) sendo K um número natural. Sabendo disso e usando o produto notável referente ao quadrado da soma, mostre que o fato interessante de elevar ao quadrado os números terminados em 5 não é coincidência, ou seja, que o fato pode ser provado matematicamente.

4) Equação do 2º grau:

É toda equação que pode ser escrita na forma: $\boxed{a.x^2 + b.x + c = 0}$ com a, b e c reais e a $\neq$ 0

4.1) Raízes da equação do 2º grau:

São todos os valores de x para os quais a equação do 2º grau é verdade. Para esse tipo de equação, pode-se provar que há exatamente duas raízes, sendo que pode ocorrer a igualdade, ou seja, as duas raízes podem ser iguais. Sendo x_1 e x_2 as raízes de uma equação do 2º qualquer, temos que acontece exatamente uma das duas situações abaixo:

- x_1 e x_2 são números reais
- x_1 e x_2 não são números reais

4.2) Calculando as raízes da equação do 2º grau:

Ideia principal: formar um produto notável conhecido!

$$a.x^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow$$
$$(a.x^2 + bx = -c).4a \leftrightarrow$$
$$4.a^2.x^2 + 4.a.b.x = -4.a.c \leftrightarrow$$

Note que no lado esquerdo da igualdade temos:

- um quadrado: $4.a^2.x^2 = (2.a.x)^2$
- 2 vezes um produto: $4.a.b.x = 2.(2ax).b$

Portanto, o que falta para completar o produto notável? Elementar, Watson! Falta o outro quadrado: b^2. Desse modo, continuemos de onde paramos:

$$4.a^2.x^2 + 4.a.b.x = -4.a.c \leftrightarrow$$
$$4.a^2.x^2 + 4.a.b.x \quad \underbrace{+b^2 - b^2}_{\substack{+\,0, pois\ não podemos \\ desbalancear\ a\ igualdade}} \quad = -4.a.c \leftrightarrow$$

$$4.a^2.x^2 + 4.a.b.x + b^2 = b^2 - 4.a.c \leftrightarrow$$
$$(2.a.x)^2 + 2.(2.a.x).b + b^2 = b^2 - 4.a.c \leftrightarrow$$
$$(2.a.x + b)^2 = b^2 - 4.a.c \leftrightarrow$$

Tirando a raiz quadrada, temos que:

$$2.a.x + b = \pm\sqrt{b^2 - 4.a.c} \leftrightarrow$$
$$2.a.x = b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c} \leftrightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Para entender melhor, vejamos alguns exemplos:

- $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow a = 1 ; b = -5 ; c = 6$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3 \end{cases}$$

- $x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow a = 1 ; b = 1 ; c = -1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Obs.: Como o termo $b^2 - 4ac$ é largamente usado, os matemáticos resolveram associá-lo a uma letra grega (Δ). Sendo assim, temos que: $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ e $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$

4.3) Detalhes interessantes sobre as equações do 2º grau:

- Sendo x_1 e x_2 as raízes, temos que:

$$S = x_1 + x_2 = (-b/a)$$
$$P = x_1 . x_2 = (c/a)$$

Para provar as relações acima, podemos usar a equação das raízes:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) . \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (\Delta)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4.a.c)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Usando as relações acima, podemos escrever uma equação do 2º grau em função da soma (S) e do produto (P):

$$a.x^2 + b.x + c = 0 \leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow \boxed{x^2 - S.x + P = 0}$$

Essas relações são úteis em diversos tipos de problemas. Por exemplo, considere um problema onde queremos saber quais são os dois números cuja soma é 5 e cujo produto é 6. Resolver esse problema é o mesmo que encontrar as raízes de $x^2 - 5.x + 6 = 0$.

4.4) Outros fatos interessantes:

1) Podemos fazer uma relação entre as raízes de uma equação do 2º grau e o valor de Δ:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
x_1 e x_2 são reais e $x_1 \neq x_2$	x_1 e x_2 são reais e $x_1 = x_2$	x_1 e x_2 não são reais

2) Nem sempre precisamos tirar as raízes de uma equação do 2º grau para resolver um problema de olimpíada. Para entender melhor, vejamos alguns exemplos:

4.4.1) (OBM – 2008 – N2 – 2ª fase – Q3 – Parte A) Os números α e β são as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Calcule $13 \cdot \alpha^5 + 5 \cdot \beta^7$.

Solução:

Se α é raiz, então temos que:

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \leftrightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$$
$$(\alpha^2 = \alpha + 1).\alpha \leftrightarrow \alpha^3 = \alpha^2 + \alpha = (\alpha + 1) + \alpha = 2.\alpha + 1$$
$$(\alpha^3 = 2.\alpha + 1).\alpha \leftrightarrow \alpha^4 = 2.\alpha^2 + \alpha = 2.(\alpha + 1) + \alpha = 3.\alpha + 2$$
$$(\alpha^4 = 3.\alpha + 2).\alpha \leftrightarrow \alpha^5 = 3.\alpha^2 + 2.\alpha = 3.(\alpha + 1) + 2.\alpha = 5.\alpha + 3$$

Analogamente, para β raiz, temos que: $\beta^7 = 13.\beta + 8$

Portanto, temos que: $13.\alpha^5 + 5.\beta^7 = 13.(5.\alpha + 3) + 5.(13.\beta + 8) = 65.\alpha + 13.3 + 65.\beta + 5.8 = 65.\underbrace{(\alpha + \beta)}_{\text{soma das raízes}} + 39 + 40 = 65.\underbrace{\left(\frac{-(-1}{1}\right)}_{(-\frac{b}{a})} + 79 = 65 + 79 = 144$

4.4.2) (OCM-1997 – 8º e 9º ano – Q5) Seja a um número inteiro positivo impar. Determine a de modo que a equação $x^2 - a.x + 4.a = 0$ tenha as duas raízes inteiras.

Solução:

Sejam x_1 e x_2 as raízes e suponha, sem perda de generalidade, $x_1 \geq x_2$. Daí, temos que:

$$x_1 + x_2 = a$$
$$x_1 . x_2 = 4a$$

Daí, temos que:

$$x_1.x_2 = 4.(x_1 + x_2)$$
$$x_1.x_2 = 4.x_1 + 4.x_2$$
$$x_1.x_2 - 4.x_1 - 4.x_2 = 0$$
$$x_1.x_2 - 4.x_1 - 4.x_2 + 16 = 0 + 16$$
$$(x_1 - 4).(x_2 - 4) = 16$$

Como $x_1 + x_2$ é impar, então x_1 e x_2 possuem paridades diferentes e, consequentemente, $(x_1 – 4)$ e $(x_2 – 4)$ também. Como $x_1 \geq x_2$ e, por consequência , $(x_1 – 4) \geq (x_2 – 4)$, teremos então que a única possibilidade é:

$$\begin{cases} x_1 - 4 = 16 \ \rightarrow \ x_1 = 20 \\ x_2 - 4 = 1 \ \rightarrow \ x_2 = 5 \end{cases}$$

Daí, temos que $a = x_1 + x_2 = 20 + 5 = 25$.

Obs.: A questão acima traz algumas ideias muito úteis e importantes:

- "Completar o produto": isso aconteceu quando somamos 16 dos dois lados para gerar o produto $(x_1 – 4). (x_2 – 4)$. Na dedução das raízes da equação do 2º grau, nós também fizemos isso ao somar b² dos dois lados para gerar um produto notável. Outro exemplo de quando esta ideia é útil são em expressões do tipo a.b ± a ± b = k, pois somando um de cada lado teremos que a.b ± a ± b + 1 = (a±1).(b±1) = k+1.

- Quando falamos em equações com m e n inteiros tais que m.n = 16, temos as seguintes soluções: (m,n) = (1,16); (8,2);(4,4);(2,8);(16,1) e as respectivas soluções negativas: (m,n) = (-1,-16); (-8,-2);(-4,-4);(-2,-8);(-16,-1). Note que as soluções são geradas pelos divisores positivos e negativos de 16. Em grande parte dos casos, as soluções são:
  - "análogas", permitindo alguma suposição sem perda de generalidade e, desse modo, conseguimos cortar alguns casos.
  - "positivas", evitando que precisemos analisar os casos negativos.

  O recomendável é, em caso de dúvida, fazer todos os casos possíveis e analisar se as soluções encontradas fazem sentido para o problema.

4.4.3) (OCM-1997 – 8º e 9º ano – Q6) Se x² + x +1 = 0, calcule o valor numérico de:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \cdots + \left(x^{27} + \frac{1}{x^{27}}\right)^2$$

Solução:

Notemos que:

$$x^2 + x + 1 = 0 \ \leftrightarrow x^2 + x = \ -1 \ (I)$$
$$(x^2 + x + 1 = 0).x \leftrightarrow \ x^3 + x^2 + x = 0 \ \leftrightarrow x^3 = -x^2 - x \ \ (II)$$
$$(I) \ e \ (II) \rightarrow \ x^3 = -(x^2 + x) = \ -(-1) = 1 \ \rightarrow \boxed{x^3 = 1}$$

Daí, temos que:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = x^3.x + \frac{1}{x^3.x} = x + \frac{1}{x}$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = x^3.x^2 + \frac{1}{x^3.x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = x^3.x^3 + \frac{1}{x^3.x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} = 1 + 1 = 2$$

Fazendo isso sucessivamente, é possível perceber que a cada três termos, as somas se repetem. Dessa forma, basta apenas achar os três primeiros termos da soma e, em seguida, multiplicar o valor por 9, pois 27/3 = 9.

Então, calculemos os três primeiros termos:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4+1}{x^2} = \frac{x^3.x+1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 1 + 1 = 2$$

Agora, podemos calcular a soma total:

$$S = \underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2}_{=(-1)^2+(-1)^2+2^2=6} + \underbrace{\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2 + \left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)^2 + \left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)^2}_{=(-1)^2+(-1)^2+2^2=6} + \cdots + \left(x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)^2$$

$$S = 9.6 \rightarrow \boxed{S = 54}$$

5) Como fazer a questão 5 da 3ª fase do nível 2 da OBM -2012?

(OBM – 2012 – N2 – 3ª fase – Q5) Considere os números reais a e b tais que: $(a+b).(a+1).(b+1) = 2 \; e \; a^3 + b^3 = 1$. Encontre o valor de a + b.

Solução:

Façamos S = a +b e P = a.b. Daí, temos que:

$$(a+b).(a+1).(b+1) = 2 \leftrightarrow S.(ab+a+b+1) = 2 \;\; (I)$$

Pelo produto notável da soma de cubos, temos que:

$$a^3+b^3 = 1 \leftrightarrow (a+b).(a^2-ab+b^2) = 1 \leftrightarrow S.(a^2-ab+b^2) = 1 \; (II)$$

Por $(I) \; e \; (II)$, temos que S ≠ 0. Daí, podemos dividir as equações e encontrar que:

$$\frac{(I)}{(II)} = \frac{S.(ab+a+b+1)}{S.(a^2-ab+b^2)} = \frac{2}{1} \rightarrow \frac{(ab+a+b+1)}{(a^2-ab+b^2)} = 2$$
$$(ab+a+b+1) = 2.(a^2-ab+b^2)$$
$$ab+a+b+1 = 2.a^2 - 2ab + 2.b^2$$

Note que estamos interessados em encontrar a soma. Desse modo, parece interessante criar um produto notável relacionado ao quadrado da soma. Sabendo que $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$ e, consequentemente, $2.(a+b)^2 = 2.(a^2 + 2.a.b + b^2) = 2.a^2 + 4.a.b + 2.b^2$, podemos, então, somar 6.a.b dos dois lados. Daí, continuando, temos que:

$$ab+a+b+1+6ab = 2.a^2 - 2ab + 2.b^2 + 6ab$$
$$7ab+a+b+1 = 2.a^2 + 4ab + 2.b^2$$
$$7ab+a+b+1 = 2.(a+b)^2$$

Substituindo pela soma e produto, temos que:

$$7.P = 2.S^2 - S - 1$$

$$P = \frac{2.S^2 - S - 1}{7} \ (III)$$

Voltando a (I), temos que:

$$S.(ab + a + b + 1) = 2 \leftrightarrow S.(P + S + 1) = 2 \ (IV)$$

Aplicando $(III)\ em\ (IV)$, temos que:

$$S.(P + S + 1) = 2 \leftrightarrow S.\left(\frac{2.S^2 - S - 1}{7} + S + 1\right) = 2 \leftrightarrow S.\left(\frac{2.S^2 - S - 1 + 7.(\mathrm{S} + 1)}{7}\right) = 2$$
$$\leftrightarrow S.(2.S^2 - S - 1 + 7\mathrm{S} + 7) = 2.7 \leftrightarrow S.(2.S^2 + 6S + 6) = 14 \leftrightarrow 2.S^3 + 6.S^2 + 6.S = 14$$

Dividindo por 2, temos que:

$$S^3 + 3.S^2 + 3.S = 7$$

Note que o lado esquerdo está quase um cubo perfeito. Para tornar ele um cubo perfeito, basta somar 1 de cada lado. Então, façamos isto:

$$S^3 + 3.S^2 + 3.S + 1 = 7 + 1 \leftrightarrow (S + 1)^3 = 8 \leftrightarrow S + 1 = 2 \leftrightarrow \boxed{S = 1}$$

Obs.: Se substituíssemos S = 1 em (III), chegaríamos à conclusão de que P = 0 e, desse modo, concluiríamos que as únicas soluções seriam (a,b) = (0,1) ou (1,0), pois:

$$x^2 - S.x + P = x^2 - x + 0 = 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x.(x-1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Essa ideia de substituir os termos por soma (S) e produto (P) deles e, a partir de S e P, fazer as contas é uma ideia muito comum em problemas de olimpíadas.

6) Exercícios:

1) Prove algebricamente que:
a) ab + a + b = (a+1).(b+1) – 1
b) ab + 2a + b = (a+2).(b+1) – 2
c) ab + xa + yb = (a+y).(b+x) – xy
d) (1+x).(1+y).(1+z) = 1 + x+ y+ z+ xy +xz + yz + xyz

2) Se x é um número real tal que $x - \frac{1}{x} = 5$, determine o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

3) Resolva os itens a e b abaixo.
a) Sejam m e n as raízes de $x^2 - x - 552 = 0$. Calcule $m^2 + mn + n^2$ e $m^3 + n^3$.
b) Sejam p e q números reais tais que: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{7}$ e $pq = 217$. Calcule $p + q$ e $p^2 + 5pq + q^2$.

4) Qual é o maior número primo que é divisor do número $(3^{12} + 3^{11} - 12)$?

5) Ache uma raiz de $\underbrace{\sqrt{2012 - \sqrt{2012 - \cdots \sqrt{2012 - x}}}}_{2012\ raízes} = x$

6) Sabendo que $(2 - \sqrt{3})$ é raiz de $x^2 - 4x + 1 = 0$, podemos calcular $(2 - \sqrt{3})^8$, sem fazer um número exagerado de contas, conforme mostrado abaixo:

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 = 4x - 1}$$
$$(x^2)^2 = (4x - 1)^2$$
$$x^4 = 16.x^2 - 2.4x.1 + 1 = 16.(4x - 1) - 8x + 1 = 64x - 16 - 8x + 1$$
$$x^4 = 56x - 15$$
$$(x^4)^2 = (56x - 15)^2$$

$$x^8 = 3136.x^2 - 2.56x.15 + 225 = 3136.(4x-1) - 840x + 225 = 12544x - 3136 - 840x + 225$$
$$x^8 = 11704x - 2911$$
Agora, basta substituir x por $(2-\sqrt{3})$ e fazer as contas, para concluir que:
$$(2-\sqrt{3})^8 = 11704.(2-\sqrt{3}) - 2911 = 20497 - 11704\sqrt{3}$$
Sabendo que $(1+\sqrt{2})$ é raiz de $x^2 - 2x - 1 = 0$, calcule $(1+\sqrt{2})^{10}$.

7) Encontre um possível conjunto de valores de a, b e k inteiros tais que:

$$\begin{cases} a = 36 \; e \; b > 30 \\ ab + ak + bk = 1997 \end{cases}$$

8) Prove que: $\sqrt[3]{20+14.\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14.\sqrt{2}}$ é inteiro.
Sugestões:

- Fazer: $a = \sqrt[3]{20+14.\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt[3]{20-14.\sqrt{2}}$ e provar que a + b é raiz de $x^3 - 6x - 40 = 0$
- Usar que: $x^3 - 6x - 40 = (x-4).(x^2+4x+10)$
- Provar que $x^2 + 4x + 10$ não tem raiz real.

9) Prove que:
$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2047}) = (1+x).(1+x^2).(1+x^4)\ldots(1+x^{1024})$$

10) Observe que:
$$34^2 = 1156$$
$$334^2 = 111556$$
Prove que, para qualquer quantidade de números três do lado esquerdo do 4, o número elevado ao quadrado é igual a mesma quantidade de uns, seguida da quantidade, menos um, de cincos, com mais um seis à direita. Em outras palavras, prove que:
$$y_k = {x_k}^2$$
Sendo que
$$x_k = \underbrace{33\ldots3}_{k\ três}4$$
$$y_k = \underbrace{11\ldots1}_{k\ uns}\ \underbrace{55\ldots5}_{(k-1)cincos}6$$

11) (Irlanda – 97) Encontre todos os pares de inteiros (x,y) tais que 1 + 1996.x + 1998.y = xy.

12) (Rússia-00) Sejam a, b, c números reais tais que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + bx + c = 0$ possuem exatamente uma raiz real comum e as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 - cx + b = 0$ também possuem exatamente uma raiz comum. Determine a soma a + b + c .

13) (Moldávia-00) Resolva em R a equação
$$(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - 2 - x = 0$$

14) (Moldávia-00) Os números inteiros a, b, c satisfazem à relação $a + b + c = 0$. Mostre que o número $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ é um quadrado perfeito.

15) (Rússia-00) Seja M o conjunto que consiste dos 2000 números $11, 101, 1001, \ldots$. Mostre que pelo menos 99% dos elementos de M não são primos.
(Dica use a fatoração $k = 2^n.I$, onde k é um número natural e I é um ímpar)